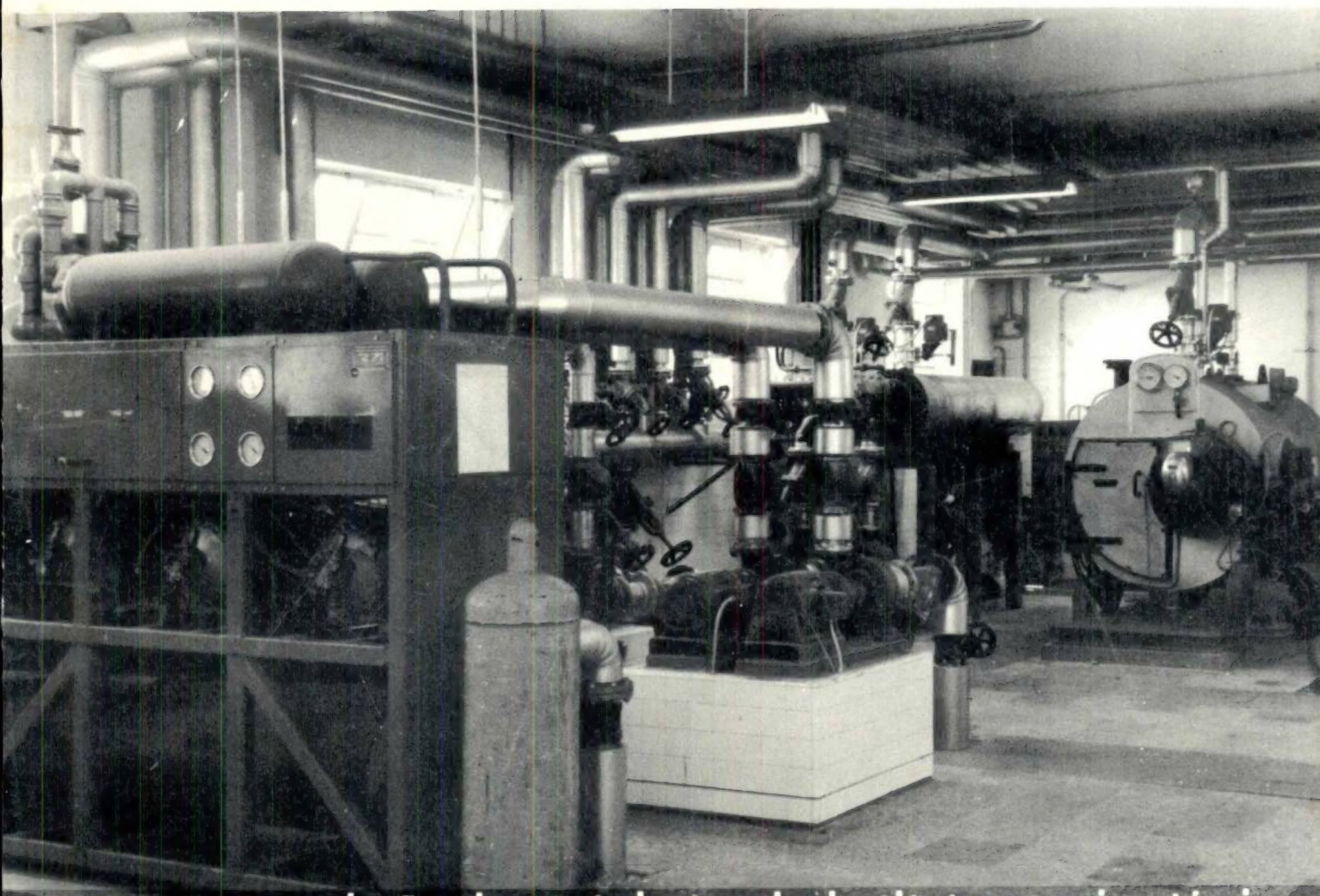
técnica



962 associação dos estudantes do instituto superior técnico
novembro 1966 revista de engenharia

VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40
(«Heliaço» e «SNT 40»)

TENSÕES DE SEGURANÇA
Ra = 2400 kg/cm²
e
Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente

HELIAÇO, LDA.

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77

confiança para a construção com

materiais novobra

EM BETÃO PRÉ-ESFORÇADO

pavimentos
coberturas
vigas de grande vão
asnas
perfis

SOCIEDADE DE PRÉ-FABRICAÇÃO E OBRAS GERAIS, NOVOBRA, LDA.
AV. EST. UNIDOS DA AMÉRICA, 100, 5.º D. - TEL. 77 48 32/76 64 46 - LISBOA-5

UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA

S. A. R. L.

SEDE

Rua de Alexandre Herculano, 244 — PORTO

TELEFONES: 2 76 76 / 77 / 78 / 79 — Est. 90

DELEGAÇÃO

Rua Rosa Araújo, 35 — LISBOA

TEL.: 73 11 81/82/83/84/85/86 - 73 33 33 - 48 49 1

●

ELECTRICIDADE DO LINDOSO
E DAS CENTRAIS DO FREIXO
E DA CACHOFARRA

●

A UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA distribui, pela mais extensa rede de alta tensão em Portugal (cerca de 2 500 km), energia eléctrica em 70 concelhos, nos distritos de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU, LEIRIA, SETÚBAL e ÉVORA.

CIMENTO SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal

Telef. 228824/5

Escritório:

R. do Comércio, 56-3.º

LISBOA 2

Telef. 328201/2/3

técnica

*NUMERO 362 * NOVEMBRO DE 1966 * ANO XLI * VOLUME XXIX * PUBLICAÇAO MENSAL*

Director
Assis Farinha Martins

Administrador
V. M. Martins Pinto

Secretário
Victor Coias e Silva

Redactores
Carlos A. C. Monteiro
J. E. Pinto Ferreira
João M. G. Caraça

Editor e Proprietário
Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico

Redacção e Administração
Avenida Rovisco Pais
Telefone 77 54 49
Lisboa 1

★

Assinaturas

		5 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	—	70$00	130$00
Ultramar, Brasil e Espanha	—	80$00	140$00
Estrangeiro	—	90$00	150$00

Número avulso — 20$00

★

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

Composto e impresso na Tipografia Jorge Fernandes, Lda. — Rua da Cruz dos Poiais, 103 — Lisboa

SUMÁRIO

45 *MANUEL ROCHA* — **Rock mechanics em Portugal**
A Mecânica das Rochas em Portugal

61 *DELGADO DOMINGOS* — **O mínimo de produção de entropia no escoamento uniforme dum fluido Newtoniano**
Minimum entropy production in the uniform flow of a Newtonian fluid

73 *ALVES MARQUES et al.* — **A investigação da estrutura das soluções de electrólitos por meio do difracção dos raios X**
A X-ray diffraction arrangement for the study of molecular structures.

81 *ARTUR RAVARA* — **Elementos sobre análise matricial de estruturas reticuladas em regime linear**
Approach to matrix analysis of linear structures

93 **Vida Escolar e Associativa**
ALMEIDA ALVES — Ao Professor Ferreira Dias

*

92 **Notas Informativas**
Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional

95 **Do Mundo Técnico**
Regulador de nível flutuante para líquidos corrosivos — Processo que evita a corrosão e criação de depósitos nas caldeiras para óleos pesados — Película de protecção permanente contra a corrosão

99 **Biblioteca**

CAPA Central do Equipamento Electro-Mecânico do Centro de Biologia do Instituto Guitenkian de Ciência — Vista parcial

Índice Alfabético dos nossos anunciantes

A — Pág.

A. Johnson & Co (Portugal), Ltd. . . . XXVIII
AEG . . . XXI
Aguiar e Melo . . . XXIX
Automática Eléctrica . . . XX
Asea Eléctrica Ld.ª . . . V

B

B. P. . . . XIV

C

CIDEX . . . IV
Cimento Secil . . . 2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos . . . VIII
Companhia Portuguesa de Fornos Eléctricos . . . XXXI
Companhia Uuião Fabril . . . XXXIII
Construções Técnicas . . . XXV

D

Dial . . . XX

E

EPACEC . . . XXXIV
Electro-Arco, Ltd.ª . . . IV
Electrotécnicos Reunidos . . . XXVII
Empresa de Cimentos de Leiria . . . XL
Empresa Electro Cerâmica . . . XXXIX
Empresa de Produtos Asfálticos . . . X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Ltd.ª . . . 3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos . . . XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações . . . XVI
ESSO . . . VI

F

Fábrica Portugal . . . II
Fanafel . . . XVI
FÁSSIO . . . XXIII
Fundações Franki, Lda. . . . I

G

George Fischer . . . III
Guedes & Almeida, Lda. . . . XXXVIII

H

Harker Sumner & C.ª, Ltd. . . . XII
Havas . . . XXIV
Heliaço . . . 2.ª da capa
Hoechst Portuguesa . . . XXX e XXXII

I — Pág.

ICI . . . XXII
I. S. T. . . . XXXII
Isola . . . XXIV

J

Jayme da Costa, Lda . . . XVII
Johann Keller . . . XX

L

LISNAVE . . . XXIV

M

MAGUE . . . XIII
MEC . . . XXIV
Mobil Oil Portuguesa . . . 4.ª da capa
Monteiro Gomes, Lda. . . . XXXVI

N

Novobra, Lda. . . . 2.ª da capa

Q

Quimicor, S.A.R.L. . . . XIX

R

Rotring . . . XXX

S

Secheron Portuguesa . . . XXVI
Sociedade Portuguesa Cavan . . . VIII
Sociedade Portuguesa de Válvulas . . . XXII
Sondagens e Fundações A. Cavaco . . . IV
Sondagens Ródio, Ltd.ª . . . XXXII
Sopecate . . . XXXVII
Standard Eléctrica . . . VII

T

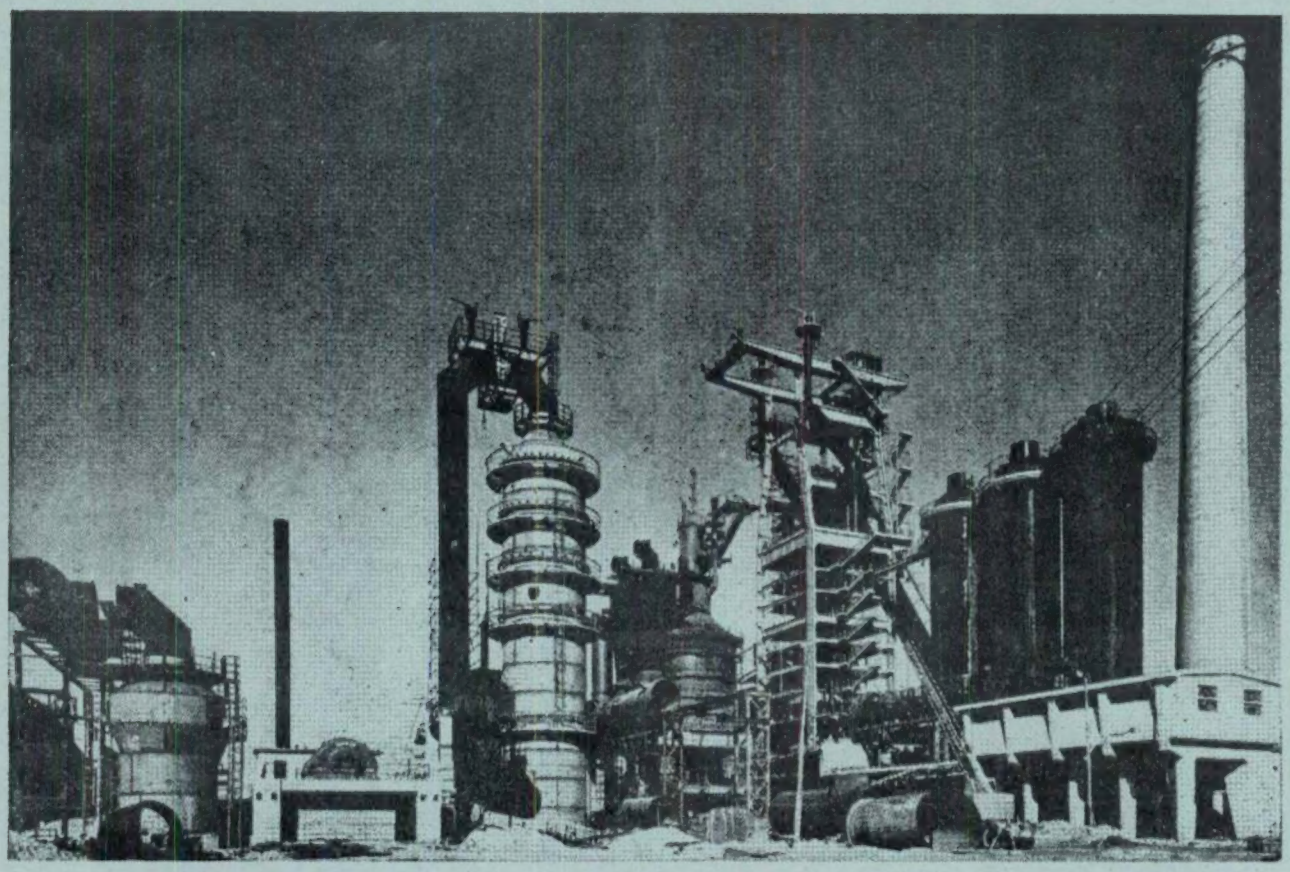
Technocommerz GmbH . . . XXXV
TESSA . . . IX
Tudor . . . XXXIX

U

União Eléctrica Portuguesa . . . 2.ª da capa

W

Wild Portugal, Lda. . . . XV



ALTO FORNO — SIDERURGIA NACIONAL (Seixal)

Fundações sobre ESTACAS FRANKI dos seguintes edifícios:

Alto Forno
Chaminé dos Cowpers
Sinterização
Aglomeração
Central de Oxigénio
Transportadores
Estação de Bombagem
Telas Transportadoras
Britagem
Laboratório
Torres Tensoras
Posto de Distribuição

1180 ESTACAS FRANKI

FUNDAÇÕES FRANKI, L.DA

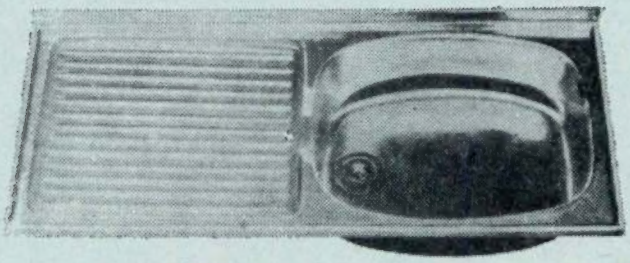
RUA BRAAMCAMP, 13, 3.º — **LISBOA-1** — TELEFONE P. P. C. 73 41 12 — ENDEREÇO TELEGRÁFICO: **FRANKI** — **LISBOA**

PRÉDIO SANTOS GIL, 6.º ANDAR — SALA 10 — TELEFONE 9 11 67 — CAIXA POSTAL N.º 1397
ENDEREÇO TELEGRÁFICO: **FRANKI — LOURENÇO MARQUES**

LAVA-LOUÇAS EM AÇO INOXIDAVEL

Modernize os lares de Portugal, usando nas suas cozinhas Lava-Louças em AÇO INOXIDÁVEL. Concepção e execução da

FABRICA PORTUGAL



elegantes e higiénicos · duração ilimitada · revestidos de isolante especial · fornecidos com sifão de segurança · não partem a louça

- 8 MODELOS STANDARD · OUTROS MODELOS FORA DE SÉRIE
- MODELOS ESPECIAIS PARA GRANDES INSTALAÇÕES
- IGUAIS AOS MELHORES ESTRANGEIROS

À VENDA NAS BOAS CASAS DA ESPECIALIDADE E NOS SEUS SALÕES DE EXPOSIÇÃO E VENDA

PRAÇA DOS RESTAURADORES · RUA FEBO MONIZ

Empirismo
ou
Exactidão cientifica
+GF+
«A experiência é tudo» esta divisa do velho moldador pertence ao passado.
Sómente ensaios sistemáticos em laboratorio conseguem a exactidão dum conhecimento real da natureza da areia.
Os aparelhos +GF+ para o controle das areias
são a base da elaboração de areias tendo caracteristicas optimas para obter uma superficie impecável nas peças moldadas.
Georges Fischer Sociedade Anónima
Schaffhouse (Suiça)
Telefone: (053) 5 60 31 / 5 70 31
Telescriptôr: 52915 geofischer schf

GM 1293/5

Bombas centrífugas «PACIFIC»

Construídas por

Batignolles - Chatillon

Especialmente destinadas para:

— Petróleos
— Indústrias químicas
— Construções navais
— Centrais eléctricas
— Alimentação de caldeiras
— Etc., etc.

Sob as condições de funcionamento seguintes:

— Débitos: 1 m³/h a 10.000 m³/h
— Pressões: altas e baixas
— Temperaturas: −180° C + 500° C
— Líquidos: corrosivos ou não

Para estudos e orçamentos, consultar o representante em Portugal:

CIDEX — Comércio Internacional
e Representações Industriais, Lda.

Av. Casal Ribeiro, 46-2.°/Telef. 73 53 07/LISBOA 1

Pesquisas e captações de água

Sondagens

Rebaixamento de níveis aquíferos

Injecções e consolidações de terrenos

Fundações

Estacas de betão

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

R. RODRIGO DA FONSECA, 62, R/C ESQ. — LISBOA-1
- TELEF. 73 35 45 - 5 95 62 - 55 38 73

ELECTRO-ARCO, L.DA

ELÉCTRODOS ✦ POSTOS ✦ ACESSÓRIOS
PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

*

ESCOLAS DE SOLDADURA

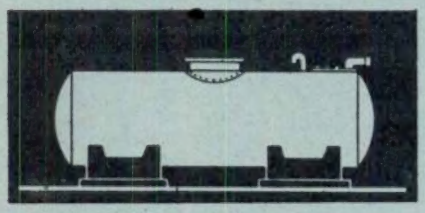
MATERIAL APROVADO PELOS
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING
BUREAU VERITAS
GERMANISCHER LLOYD

LISBOA
Rua Silva Carvalho, 239
Tels. 68 36 49 - 68 48 93

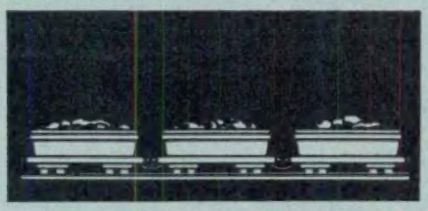
FÁBRICA E LABORATÓRIOS
Venda Nova — Amadora
Tels. 97 06 13 - 97 17 33

PORTO
Rua do Bolhão, 216
Tel. 2 12 77 - 39 44 73

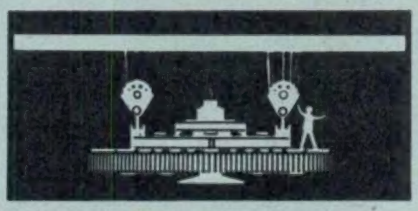
edição industrial
O PRESSDUCTOR
indica a carga



Na indústria química: O que se passa no interior do processo?

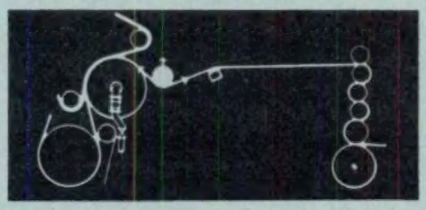


Para caminhos de ferro: Qual a carga do eixo da roda e o peso total?

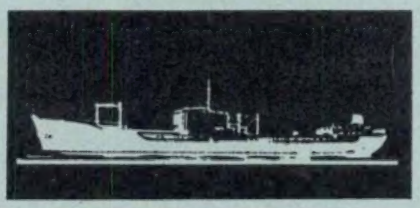


Nos guindastes: Qual é o peso?

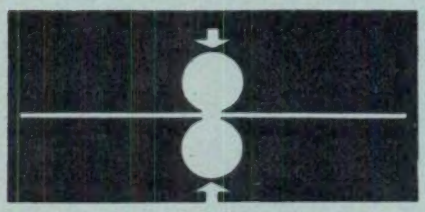
No controle e supervisão da quantidade: Quanto material tem sido usado?



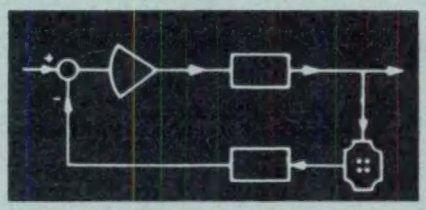
Nas fábricas de papel: Qual é a tensão do papel?



Em cargueiros: Qual é a grandeza das forças de propulsão?



Na laminagem: Qual a força?



Na automação: Qual a força de tensão ou peso?

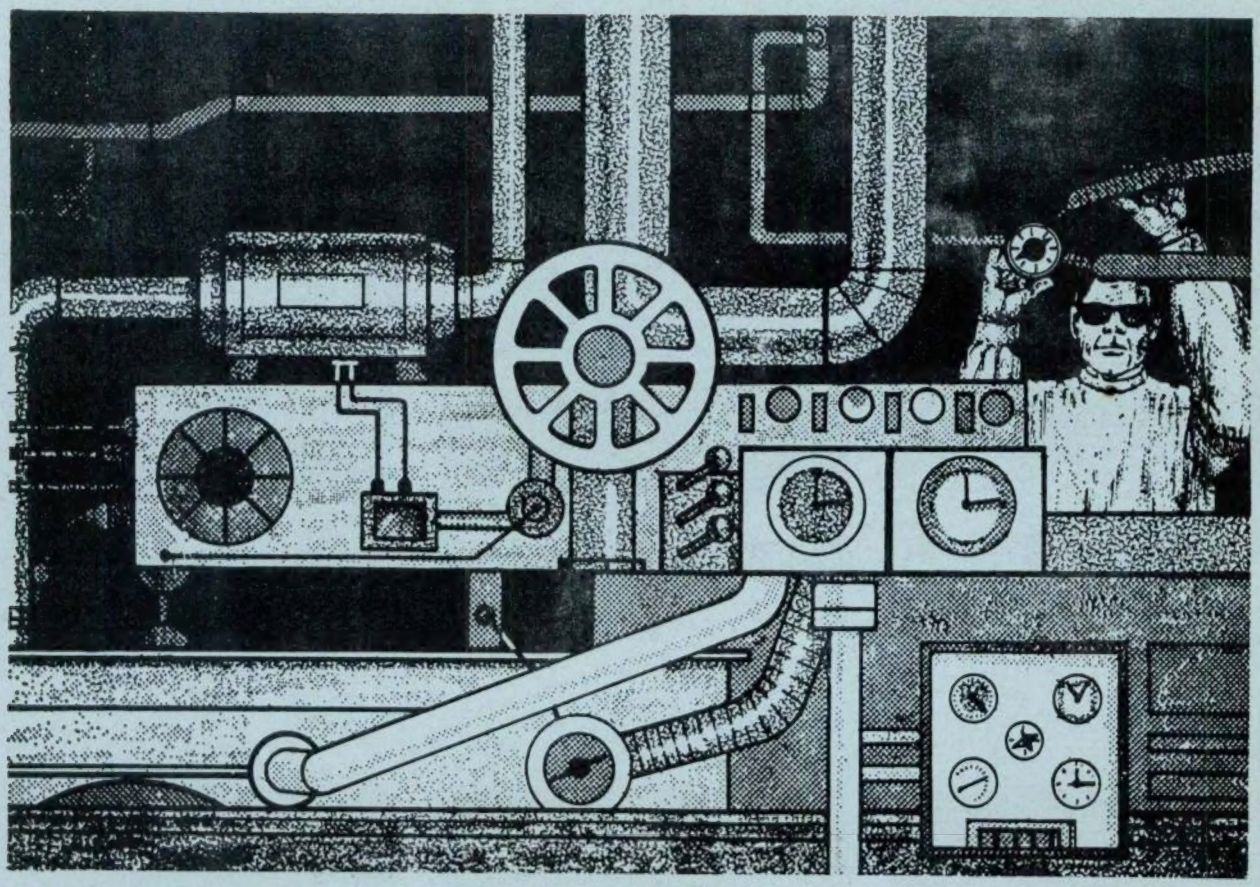
Em estacaria: Qual a carga das pilastras

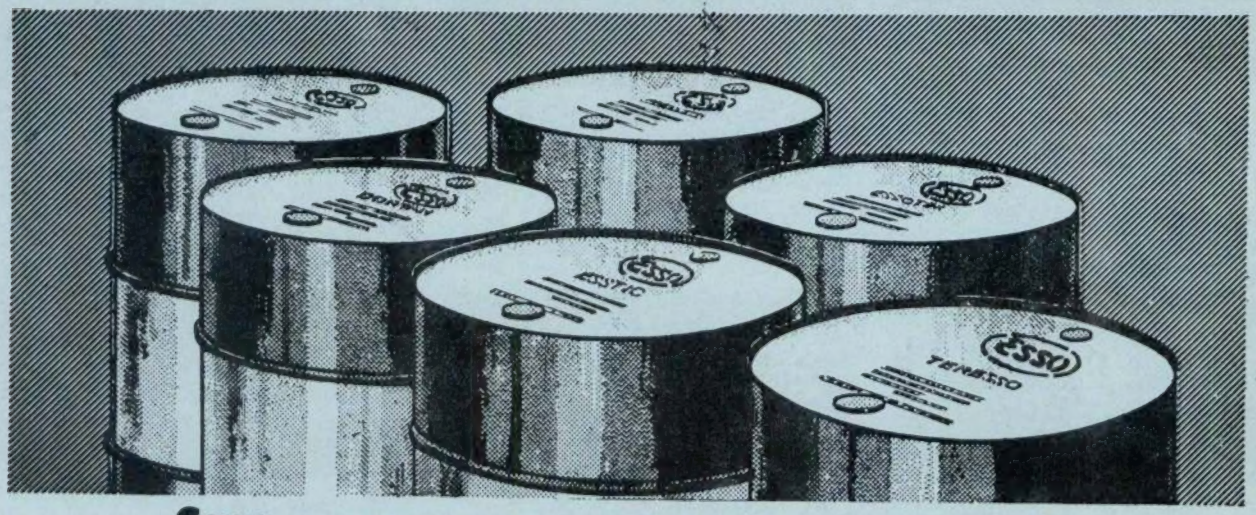
uma força criadora no domínio da electricidade

ASEA

ELÉCTRICA, LDA.

Sede em Lisboa: R. Rodrigues Sampaio, 18, 5º
Filial no Porto: Rua do Campo Alegre, 144





ESSO GARANTE UMA PRODUÇÃO ININTERRUPTA

Há óleos industriais ESSO para toda a espécie de maquinaria. Eles permitem uma produção Ininterrupta porque reduzem ao mínimo a possibilidade de paralização das máquinas.

O óleo industrial ESSO garante, ainda, uma grande economia na manutenção do material, melhor conservação e menor desgaste das peças.

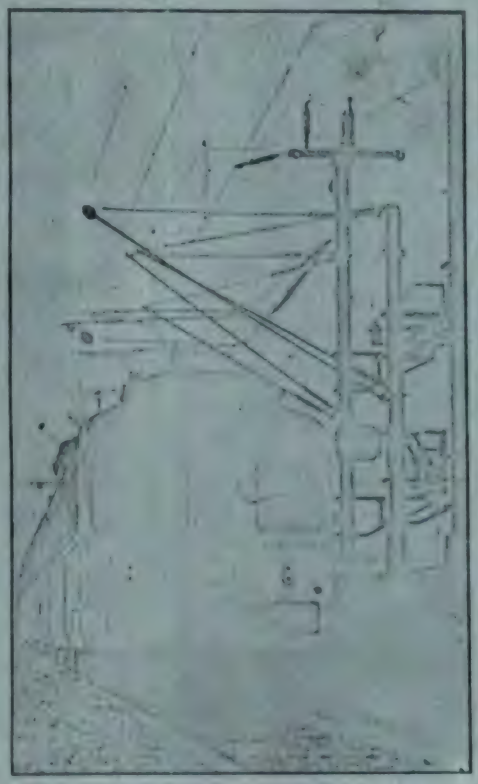
Do seu uso decorre uma maior produtividade e consequentemente, maiores benefícios.

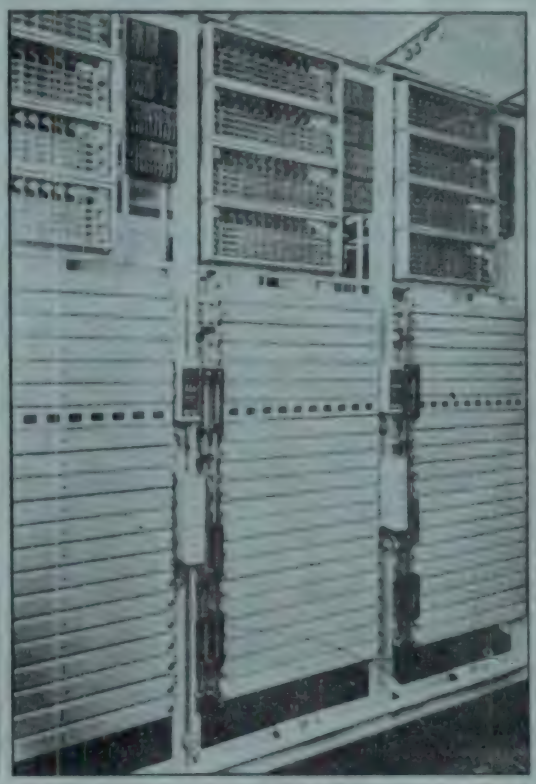
ESSO .... PROGRESSO .... SUCESSO

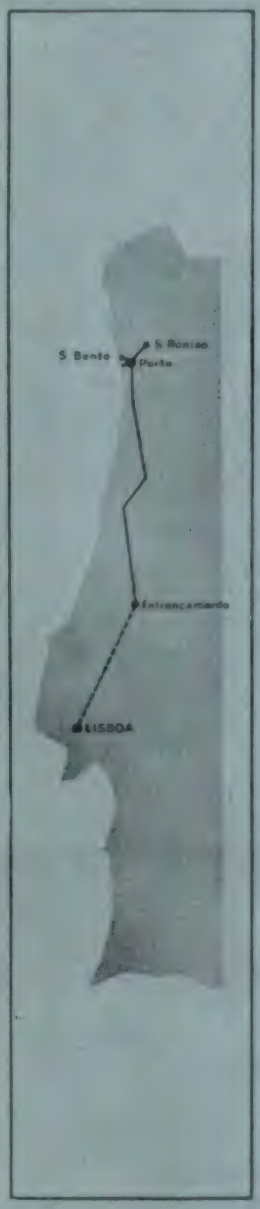
ESSO O SIMBOLO ESSO REPRESENTA SETENTA E SETE ANOS DE EXPERIÊNCIA MUNDIAL, COM VINTE DE BONS SERVIÇOS EM PORTUGAL

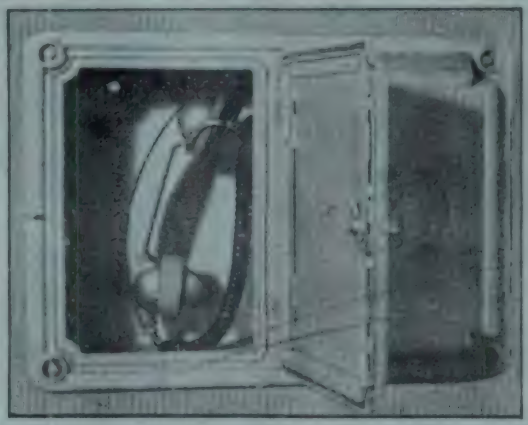
ESSO STANDARD PORTUGUESA (COMPANHIA DE PETRÓLEOS) S. A. R. L.

Em Lisboa: Rua Filipe Folque, 2 – No Porto: Av. Serpa Pinto, 227 - Matosinhos









COMPANHIA DOS CAMINHOS DE FERRO PORTUGUESES

Electrificação — 2.ª fase

TELECOMUNICAÇÕES

ENTRONCAMENTO - PORTO (CAMPANHÃ)
PORTO (S. BENTO) - S. ROMÃO

A Standard Eléctrica orgulha-se de ter fabricado, fornecido e instalado o sistema completo de telecomunicações para a linha do Norte e ramais numa extensão de 300 Km.

Igualmente a Standard Eléctrica instalou 480 Km de cabo armado telefónico de fabricação nacional da CEL CAT, incluindo a execução de todas as juntas selectivas.

O planeamento do complexo sistema de telecomunicações assim como o projecto dos equipamentos foi executado pelo Departamento Técnico da Standard Eléctrica em estreita colaboração com a Comissão de Electrificação da C. P.

Standard Eléctrica **ITT**

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 66 61 86 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

CAVAN

SOCIEDADE PORTUGUESA

✸

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS

COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

✸

RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A
TELEF. 4 7812-5 0129
LISBOA

Fitas adesivas para todas as aplicações

Estes rolos são apenas uma pequena fracção da nossa gama de fitas adesivas **tesa**.

Temos muitas qualidades diferentes: incolor e a cores, em celofane e PVC, papel e tecido, com ou sem impressão, com massa colante de um ou dos dois lados (a gama de fitas adesivas **tesa** é a mais completa fabricada em Portugal, e em toda a Europa).

No entanto, todas as fitas **tesa** têm uma característica em comum: cada uma foi cuidadosamente estudada e concebida segundo a sua aplicação.

Seja qual for a sua actividade profissional, temos uma fita adesiva própria para racionalizar o seu trabalho.

tesa

tesaband — tesaborde — tesafilm
tesafix — tesaflex — tesafort
tesakrepp — tesamoll — tesaprint — tesatip,
são marcas registadas correspondentes a produtos originais «tesa» de alta qualidade.

BEIERSDORF PORTUGUESA S.A.L.R. / Queluz **Secção de Vendas: Lisboa – Praça da Alegria, 58-1.º Tel. 32 69 43, 32 29 57**

Celulite

ISOLAMENTO
TÉRMICO DAS
CONSTRUÇÕES

PAVIMENTOS
*
TECTOS
*
PAREDES
*
CÂMARAS
FRIGORÍFICAS
*
ISOLAMENTOS
INDUSTRIAIS

Terraços e pavimentos isolados com CELULITE no edifício da Comp.ª de Seguros Fidelidade — P. das Águas Livres — Lisboa

SETH, LDA. • RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.° • TEL. 53 01 56 — LISBOA

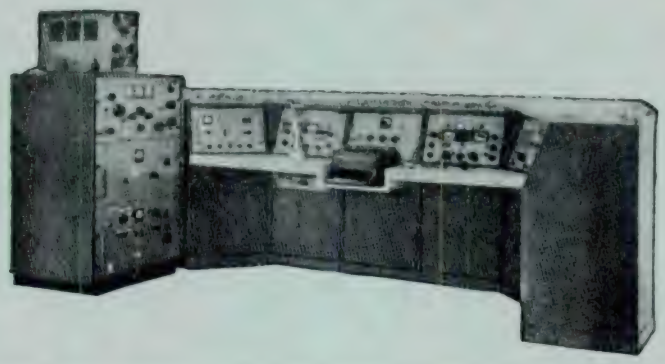
Para impermeabilizar terraços,
paredes, fundações, etc.

COLAGEM DE
TACOS DE MADEIRA

TELEF. 53 0156 TELEG. EPALDA — LISBOA

EMPREZA DE PRODUCTOS ASFÁLTICOS
IMPERMEABILISADOR
IMEPA
RUA FILIPE FOLQUE, 10-1.º-LISBOA

FÁBRICA EM SÁCAVÉM



Comunicações

equipamentos
e sistemas completos

- Cuidadosamente projectados
- Amplamente experimentados
- Completamente integrados

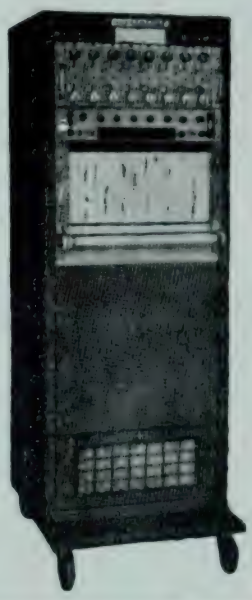
THE TECHNICAL MATERIEL CORPORATION

HEWLETT hp PACKARD

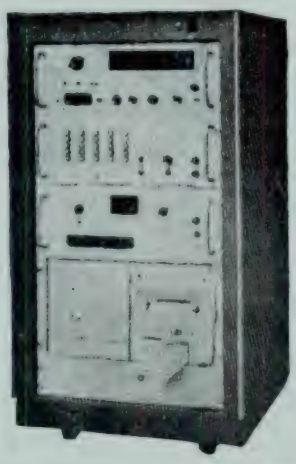
aparelhagem electrónica de medida e registo

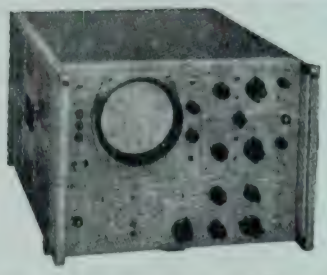
Osciloscópios, Oscilógrafos, Voltímetros electrónicos, Geradores de sinal, Contadores electrónicos, Registadores digitais, Fontes de alimentação

Registador Sanborn



Registador digital Dymec

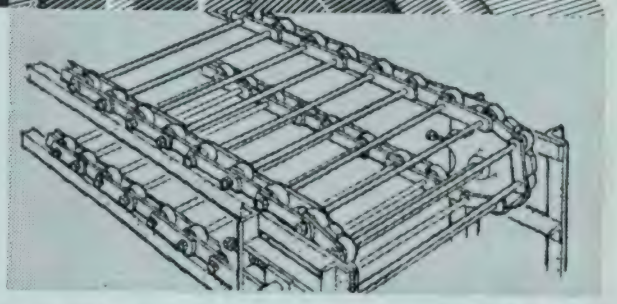




Osciloscópio HP

Contador Electrónico HP

TELECTRA EMPRESA TECNICA DE EQUIPAMENTOS ELECTRICOS, S.A.R.L.



CORRENTES de aço PARA TRANSPORTADORES e ELEVADORES

Seja qual for o serviço, Renold — os maiores fabricantes do mundo de correntes — podem fornecer a corrente apropriada a preço convidativo.
A gama, em depósito, até 13.600 Kg de carga de rotura, satisfaz a 95% das necessidades normais.
Por encomenda, pode-se fornecer correntes até 136.000 Kg de carga de rotura.

Para informações ou fornecimentos, escreva, visite ou telefone:

HARKER, SUMNER & Ca. Lda.

PORTO: 38, Rua de Ceuta, 48
Apartado No. 162
Tel: 27054-P.P.C. (4 linhas)

LISBOA-2: 14, Largo do Corpo Santo, 18
Tel: 324823-35124

RENOLD

RENOLD CHAINS LIMITED
MANCHESTER INGLATERRA

técnica

NUMERO 362 * NOVEMBRO DE 1966 * ANO XLI * VOL. XXIX * DIRECTOR: ASSIS FARINHA MARTINS

C. D. U. 624.132.25 (469)

ROCK MECHANICS IN PORTUGAL (*)

by MANUEL ROCHA

Director, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa

RESUMO

É apresentada uma síntese da actividade que tem sido desenvolvida em Portugal no domínio da Mecânica das Rochas. Referem-se quer os estudos em laboratório quer «in situ», salientando-se as contribuições para o progresso dos conhecimentos e das técnicas e os resultados mais relevantes que têm sido obtidos.

SPNOPSIS

A synthesis of the activities in the field of Roch Mechanics in Portugal is presented. The article describes laboratory and «in situ» studies, specially those contributing to the progress of knowledge and the improvement of techniques, and the major results so far obtained.

1. INTRODUCTION

In Portugal, activities in the field of Rock Mechanics have been almost exclusively concentrated at the Laboratório Nacional de Engenharia Civil (LNEC). These activities began about twenty years ago, in connexion with the foundations of Castelo do Bode dam, and have been progressively developed since then.

Studies in the field of Rock Mechanics have been stimulated above all by the problems posed by the foundations of concrete dams [1]. Nevertheless opportunities have also arisen for studying problems concerned with underground power stations, tunnels and slopes.

At present the staff active in Rock Mechanics studies at the Laboratório comprises 20 full--time employees, 10 of which are university graduates. Additionally, other sections of the Laboratório such as those dealing with instrument design and construction, observation of the behaviour of structures, and documentation, help Rock Mechanics studies.

The policy followed in Rock Mechanics research is the same adopted by the LNEC as a technological research institution. Thus: i) a constant attention has been paid to the identification of problems with a real practical interest, which led us to give a special emphasis tho the *in situ* study of rock masses and to the observation of the behaviour of structures; ii) it is attempted to obtain a balanced knowledge, i.e. the available means are not concentrated on particular aspects of a problem at the cost of neglecting others, perhaps as relevant; iii) the improvement of knowledge and the accuracy of predictions are adjusted to the real needs of the problem to be solved.

(*) Apresentação da actividade desenvolvida em Portugal no domínio da Mecânica das Rochas, feita no I Congresso da Sociedade Internacional de Mecânica das Rochas, que teve lugar em Lisboa, em Setembro de 1966.

I am going to describe the activities so far developed and those in progress. Due to the short time available, no more than a general picture of the aspects deemed more important can be presented.

2. QUALITY INDICES

Given the marked heterogeneity usual in rock masses, in particular near the surface due to weathering, we have been seeking for some time to establish quality indices which, by means of a quick and economic test, can characterize the properties of a rock mass, e.g. its deformability or its shear strength. This is possible only if, in each case, a correlation, to be obtained by means of *in situ* tests, exists between the index and the property to be assessed.

In the case of granular rock masses little influenced by jointing, as frequently occur in granites when weathering is much advanced, it has been possible to obtain correlations — sufficiently tight to be of practical interest — between the mechanical properties of the rock mass and the water absorption by specimens of the rock [2]. The correlation between the modulus of deformability determined *in situ* and the water absorption, considered as a quality index, is presented in fig. 1 for the granite rock of the foundation of Alto Rabagão dam, a structure about 90 m high recently completed in Northern Portugal [1]. The quality index was determined at many points at different depths as the excavation proceeded, until values corresponding to the deformability modulus assumed in the design were obtained at the different foundation zones. Thus by means of a quality index it was possible to decide more objectively than usually, the required foundation depth. Notice that on the basis of model tests an extremely low deformability modulus of about 10 000 kg/cm² (140 000 psi) was accepted in the design for the decomposed granite forming the upper portion of the left bank. This value was confirmed by observing the displacements of the dam during the first filling of the reservoir.

As it was to be expected, we have been unable to find significant correlations between the quality indices and the mechanical properties of rock masses when the behaviour of these is appreciably influenced by jointing and other macrofractures. In the fig. 2 the abcissas are the values of the quality index and the ordinates the values of the modulus of deformability determined *in situ*, during the exploration of the foundation rock mass of the future Vilarinho das Furnas dam. As can be seen there is no correlation.

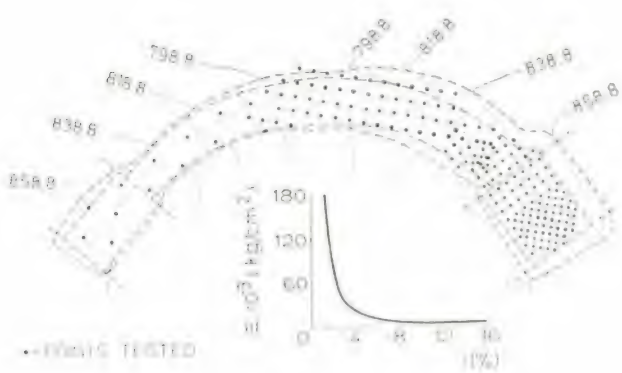


Fig. 1

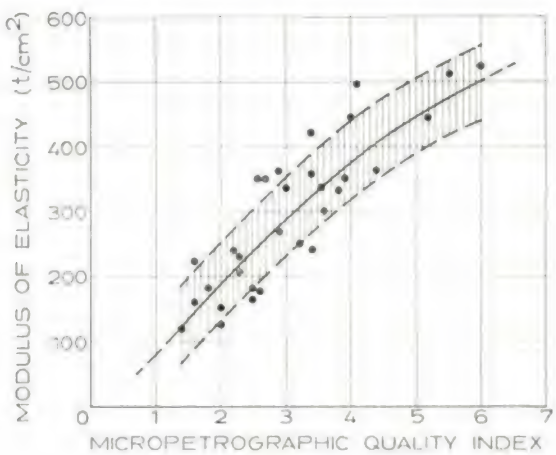


Fig. 2

Another quality index that we recently began to use, which is dealt with in a paper presented at this Congress [3], is based on the micropetrographic analysis of thin sections of the rock. The micropetrographic index is defined as the ratio, for a given volume of the rock, of the volume of unaltered minerals to the volume of altered minerals, fissures and voids. A correlation obtained between the moduli of elasticity of core samples and the micropetrographic indices is presented in fig. 2. As seen, this correlation is comparatively satisfactory. As this index takes into account not

only the voids, as does the preceding index, but also the altered minerals, it is to be expected that it yields tighter correlations with the mechanical properties of the rock. Anyway the interpretation of the mechanical behaviour of rocks in their mineralogic composition and of the alteration of the minerals seems very promising.

Quality indices are especially helpful in the case of rocks from which specimens for mechanical tests cannot be obtained, due to their alteration or their structure, v.g. schistosity. This is particularly important in civil engineering undertakings, in which it is usually attempted for economic reasons to reduce excavations to a minimum, so that comparatively superficial formations have to be considered in areas where, due to weathering, undisturbed samples are difficult to obtain.

When specimens for mechanical tests in laboratory can be obtained, it is better to select for quality index a mechanical property, such as the modulus of elasticity, the compressive strength or the shearing strength, since the correlation is tighter between the values of this property and the mechanical properties of the rock mass.

The problems of alteration and alterability of rocks recently began to be studied and we intend to investigate in particular the influence of the state of stress. The problem of petrification of soils, particularly of lateritic soils, has been the object of some studies [5].

3. DEFORMABILITY OF ROCK MASSES

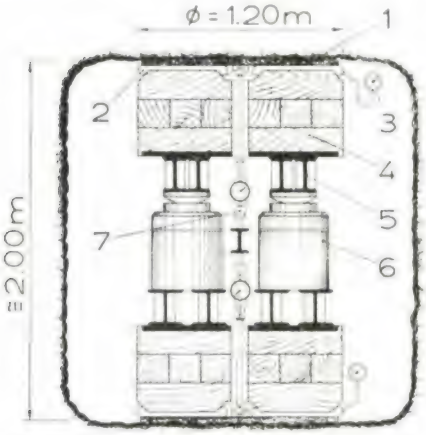
I will now describe the activities in connexion with the three basic problems posed by the characterization of a rock mass, that is the investigation of its deformability, its strength and its state of stress. In accordance with the general policy mentioned, in which we try to investigate as fully as possible the real behaviour of rock masses, a special attention has been paid to the study of these three problems by means of *in situ* tests [4] [5]. Both our and others' experience shows that the deformability and the strength of rock masses cannot be satisfactorily determined, as a rule, by means of laboratory tests.

We usually determine the deformability of rock masses by means of jackloading tests in adits, in which an area of one square meter is loaded as shown in fig. 3. So far, more than 500 tests were carried out with this setup on formations of very different natures, so that a comparatively extensive knowledge on the deformability of rock masses was obtained. In special cases of rock masses in which heterogeneity and cracking are not very marked, jackloading tests are sometimes carried out on smaller areas, for instance circles 30 cm in diameter, with a view to preliminary estimates of the deformability.

Creep is systematically investigated with the same setup by means of tests with a suitable duration, sometimes of more than a week. The results of *in situ* creep tests under stresses of about 50 kg/cm^2 on areas of 1 m^2 [4] are presented in fig. 4. In abscissas are plotted the moduli of deformability corresponding to a load applied during 30 minutes, designated by E_{30}, and in ordinates the values of the relative decrease of the modulus of deformability, that is $\frac{E_{30} - E_{\infty}}{E_{30}}$, in which E_{∞} is the modulus of deformability for an infinite time, obtained from the tests by assuming a certain creep law. The tests performed so far on rock masses of very different natures, grouted or even in the natural condition, show that the relative decrease of the modulus of deformability is less than 15 % in the majority of cases and only in one case did it reach 25 %. That is, creep is not relevant under stresses of the order of magnitude of those applied by the structures on their foundations. Notice that this has been observed even in very altered rock masses with moduli of elasticity of less than 5000 kg/cm^2, which is rather unexpected.

The tests for determination of the deformability are very often carried out on the rock mass in its natural condition and repeated on the same surfaces, after the rock mass has been grouted [4]. In fig. 5, the values of the modulus of deformability of the rock mass before grouting, E_n, are plotted in ordinates and the values of the same modulus at the same points after grouting, E_g, are

plotted in abscissas. Many of the points lie near the straight-line $\frac{E_g}{E_n} = 1$, which means that deformability remained practically unchanged with grouting. In some cases, however, the modulus of deformability increased three times, as some points lie near the straight-line $\frac{E_g}{E_n} = 3$. As is well-known, the effect of grouting depends on the nature of the rock masses, and very frequently their deformability is not improved by grouting.



1 Mortar bed
2 Flat jack
3 Pressure gauge
4 Timber packing
5 Steel sections
6 Hydraulic jack
7 Deformeter

Fig. 3

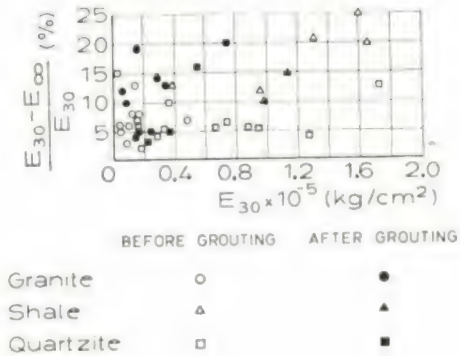


Fig. 4

The procedure used for determining the deformability of a rock mass is open to two criticisms: i) the tested zone of the rock mass is disturbed by the excavation; ii) the volume involved is not yet representative in many cases, although the loaded area amounts to 1 m².

In order to overcome these difficulties a new method, presented in fig. 6, is being developed for determining the deformability of rock masses. A slot or a series of contiguous slots are cut in the rock by means of a diamond disk with a diameter d, equal to for instance 1 m, and a width t. A flat jack is installed in each slot and the same pressure p is simultaneously applied in all the jacks. The increase in the distance between the faces of the slots due to the applied pressure p is measured by means of instruments inserted in the jacks. Fig. 7 shows the slot-cutting machine fitted with a disk 1 m in diameter. Although not yet applied in the field, this method seems an important

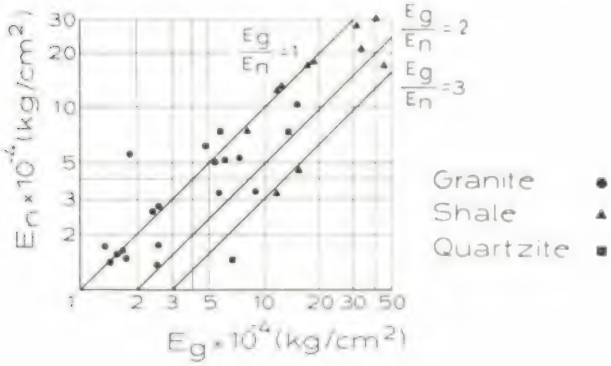


Fig. 5

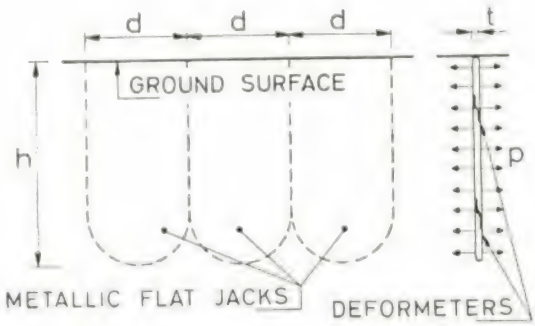


Fig 6

improvement as, on one hand, it practically eliminates disturbances in the rock mass and, on the other, it enables large volumes of a rock mass to be quickly and economically tested.

We believe nevertheless that the jackloading tests will remain in use for the cases in which it is just the deformability of the rock mass, taking into account the disturbance due to excavation,

that is to be determined. Even so, we intend to improve it by measuring the displacements of the rock mass at different depths, instead of only at the loaded surface, so as to obtain the deformability in the successive layers, where the disturbance decreases in function of the distance to the surface. It will thus be possible to predict, for instance, the deformation of a foundation by integrating the deformations of different layers.

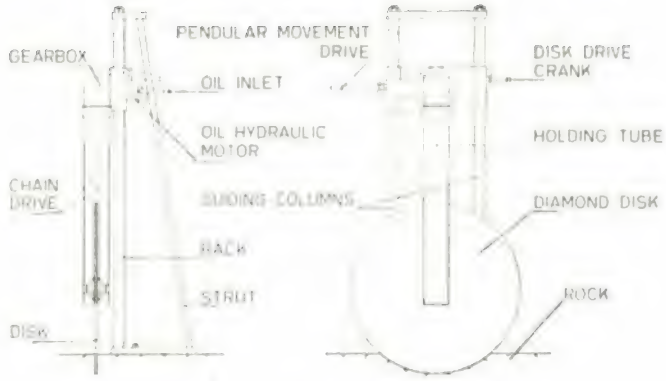
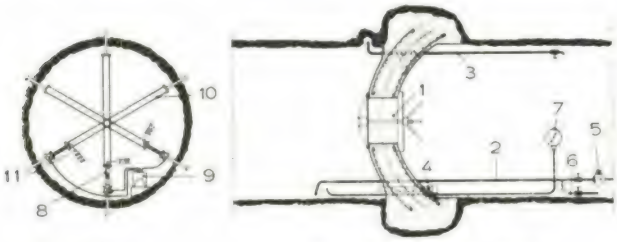


Fig. 7

Another method in use for determining the deformability of rock masses, in special for designing tunnel linings, is the well-known method consisting in determining the deformation of a section of an adit under water pressure [5]. The setup used is presented in fig. 8. The deformations of the adit are measured along different directions by means of vibrating wire strain meters. The change in length of 3 diameters in function of the applied pressure is presented in fig. 9. In spite of a previous grouting, the rock mass presents a marked anisotropy with a larger deformability along the vertical, as is usual in altered rock masses.



1 MANHOLE
2 WATER INLET
3 AIR OUTLET
4 CABLE ADMISSION TUBE
5 WATER METER
6 WATER OUTLET
7 PRESSURE GAGE
8 VIBRATING WIRE METER
9 AIR PRESSURE EQUALIZING CHAMBER
10 INVAR RODS
11 CABLE

Fig. 8

The methods so far mentioned for determining the deformability require that the point of the rock mass to be tested be made accessible by means of an adit which is a severe limitation, in special for points at great depth and rock masses with an intense water percolation, particularly at points under river beds. That is why a dilatometer was recently developed for determining the deformability along boreholes. As this dilatometer is described in a paper presented at this Congress [6], we will merely state that it was developed for use in boreholes with the usual diameter in site investigations. Thus, as shown in Fig. 10, the instrument has a diameter of 74 mm with a view to enabling its use in boreholes 76 mm in diameter. The deformations due to the pressure applied on the wall of the borehole are determined very accurately by means of differential transformers along four diameters at 45°, so as to investigate the anisotropy of the rock mass. The influence of cracking of the rock mass on the deformation of the diameters was studied theoretically.

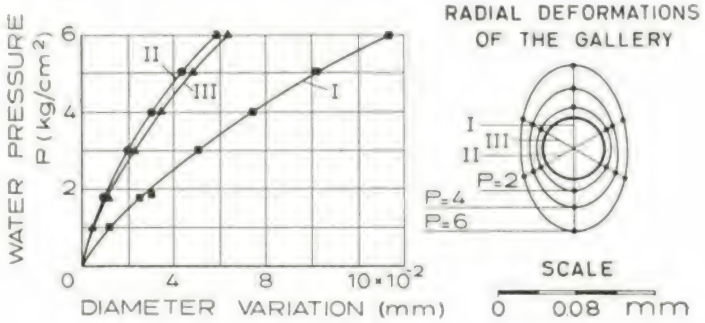


Fig 9

Curves of thepressure versus deformations of two diameters, obtained in one test in which successive loading-unloading cycles were applied, are presented in Fig. 11. As can be seen, the curves are entirely analogous to those usually obtained in jackloading tests.

The dilatometer has the drawback that only a very small volume of the rock mass is tested. Nevertheless, given the possibility of making many tests, almost amounting to a continuous determination of deformability along the boreholes, it should be possible, at least in some cases, to subject the results obtained to a statistical processing, by means of which the average deformability of the different zones of the rock mass could be determined with the accuracy currently required.

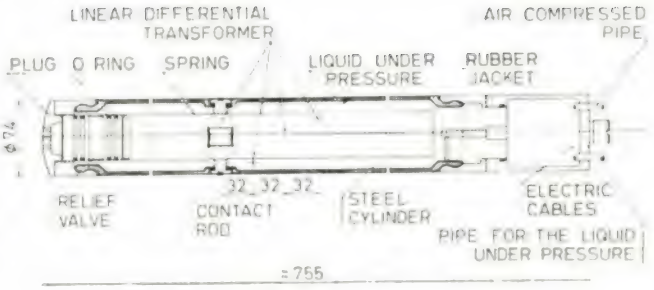


Fig 10

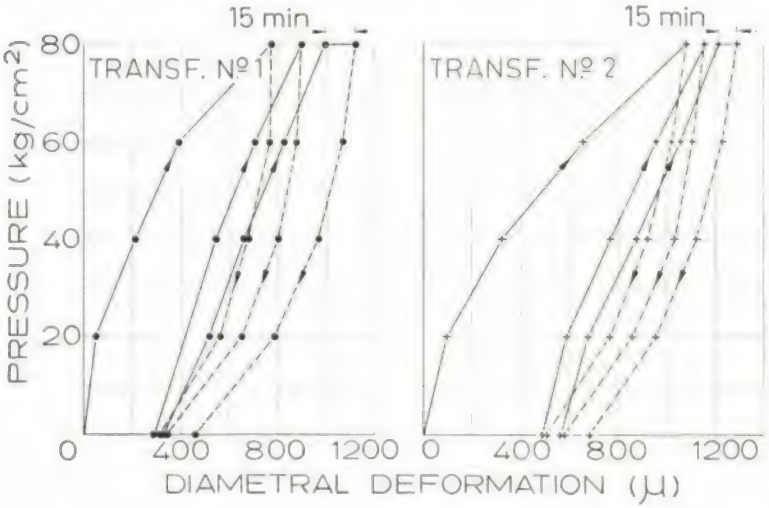


Fig. 11

Laboratory tests are also systematically carried out for studying the deformability of rock masses. In fact, besides contributing to a general characterization of the component rocks, these tests often enable a satisfactory study of the influence of certain parameters on the deformability of the rock mass proper. This is possible in the case of parameters with a slight influence on the contribution of joints and other fractures to the deformation of the rock mass. Such can be the case, for instance, with the creep and the influence of the humidity on deformability.

Different laboratory studies have been carried out on the anisotropy of rocks. One of these, presented at the Congress [7] concerns the law of variation of the modulus of elasticity and of the ultimate compressive strength in function of the direction of the applied stress. The tests on granites so far carried out show that the distribution of these magnitudes is ellipsoidal. In fig. 12 are

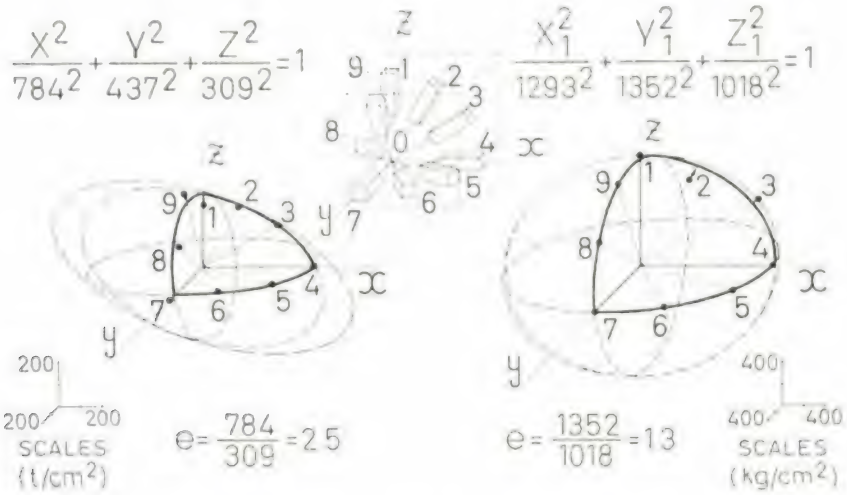


Fig. 12

Fig. 13

shown the points representing the moduli of elasticity and the ultimate strengths determined in 9 prisms taken from a single block along the directions indicated in the figure. As shown, the experimental points differ but little from the solid line curves lying on the ellipsoids. According to the tests, the axes of the modulus of elasticity and of the ultimate strength ellipsoids do not coincide at each point, and the anisotropy of the modulus of elasticity has been systematically more marked than that of the ultimate strength.

As for anisotropic rocks, I will mention further the study of the rheologic behaviour ofs chists and of the laws governing the change of deformation with the direction in an orthotropic body made up of alternate thin layers of two elastic materials. Both studies were presented as papers at this Congress [8] [9].

We have also studied creep phenomena in rocks by means of laboratory, mainly triaxial, tests. A system of 9 triaxial cells for quick tests and creep tests of rocks under confining

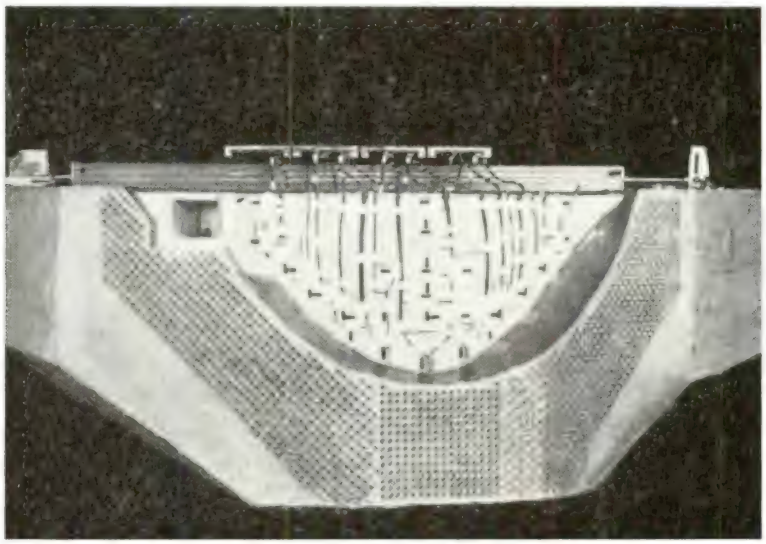


Fig. 14

pressures up to 1000 kg/cm² is presented in Fig. 13. Specimens with diameters up to 7.5 cm can be tested, and longitudinal and transverse strains are measured by instruments applied on the specimens inside the cells. These triaxial cells were developed for studying creep phenomena in rocks under the high stresses occuring in the neighbourhood of deep tunnels.

4. MODELS AND FIELD OBSERVATION

In order to take into account the influence of the deformability of the foundations on the behaviour of structures, particularly on their state of stress, model tests have very often to be used. Such is the case with concrete dams [1] [10]. Fig. 14 shows the model of an arch dam whose foundation presents a system of holes whose diameters and distance were varied from zone to zone in order to reproduce the deformabilities in the rock mass as determined by *in situ* rock tests. In fig. 15 is shown a model of Tang-E Soleyman dam in which the sedimentary layers forming the foundation were reproduced [11].

Fig. 15

The study of more than 200 models of concrete dams of different types, in the majority of which the influence of the deformability of the foundations was investigated,enabled the conclusions presented in fig. 16 to be drawn. The figure expresses, in qualitative terms, the influence of a

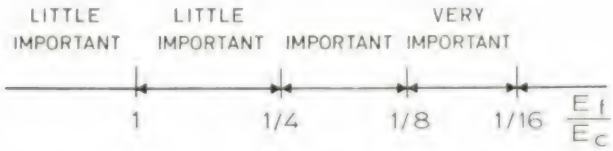
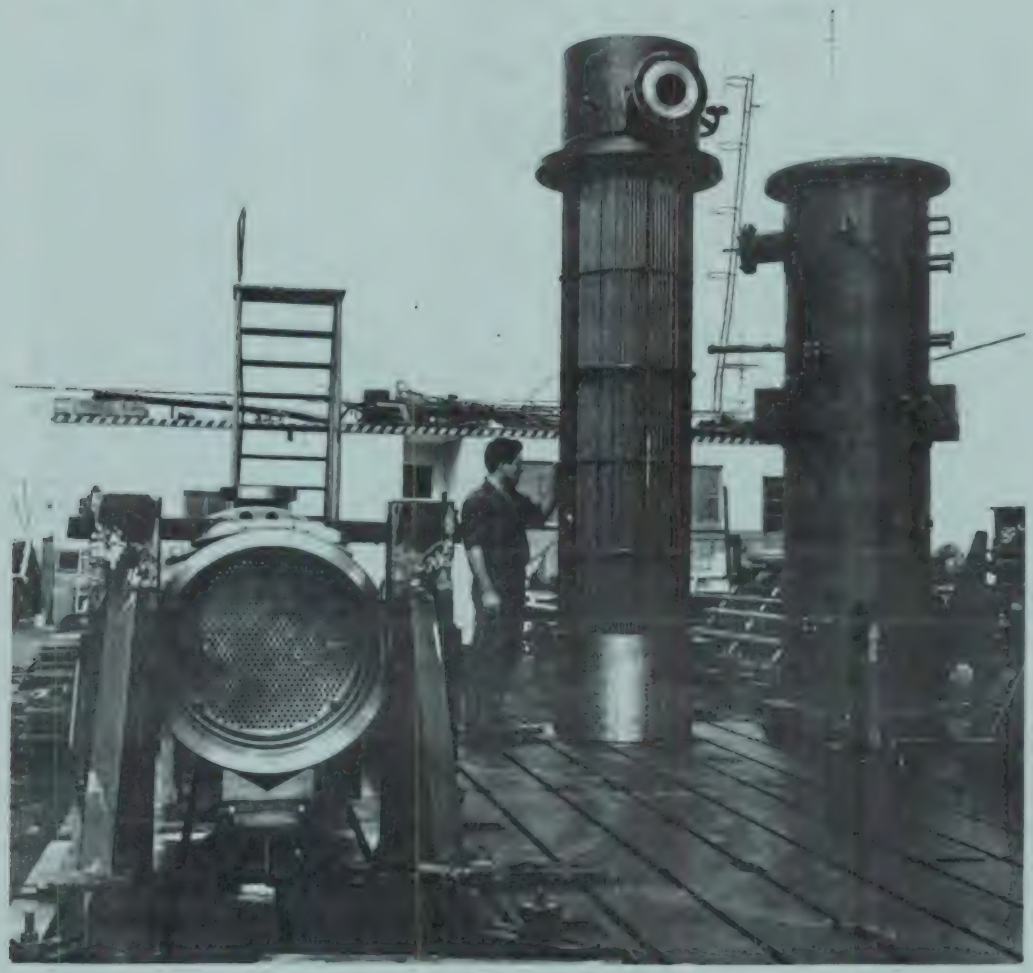


Fig. 16

change in the deformability of the foundation on the state of stress in the dam, in respect to the case of a foundation with the same deformability as the concrete of the dam. The ratio $\frac{E_f}{E_c}$ of the modulus of elasticity of the rock mass to that of the concrete can vary, even in extensive zones of the foundation, from high values down to 1/4 without an important influence on the state of stress;

MAGUE



Elementos de um Pré-Aquecedor de Alta Pressão (Manto e Câmaras de Agua com Feixe Tubular) para a Central Térmica da Tapada do Outeiro - 3ª fase. (Licença Brown Boveri).

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L.

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

BP
GÁS
BP
GÁS
BOM NATAL
VIVA A TERRA EM PAZ
FELIZ NATAL
DÁ-LHE O BP GÁS
1 GARRAFA A QUEM UM CONTRATO FIZER
de 15 de nov. a 15 de jan.

contrary to some beliefs, it is only for values of $\frac{E_f}{E_c} < \frac{1}{4}$ that the influence of the deformability becomes of importance, and considerably more so for $\frac{E_f}{E_c} < \frac{1}{8}$; for values of $\frac{E_f}{E_c} < \frac{1}{16}$ the conception of the dam and the state of stress in it are entirely governed by the deformability of the foundation. These conclusions are of course of a general order and purely qualitative, as the influence of the deformability of foundations depends on numerous parameters, variable from case to case.

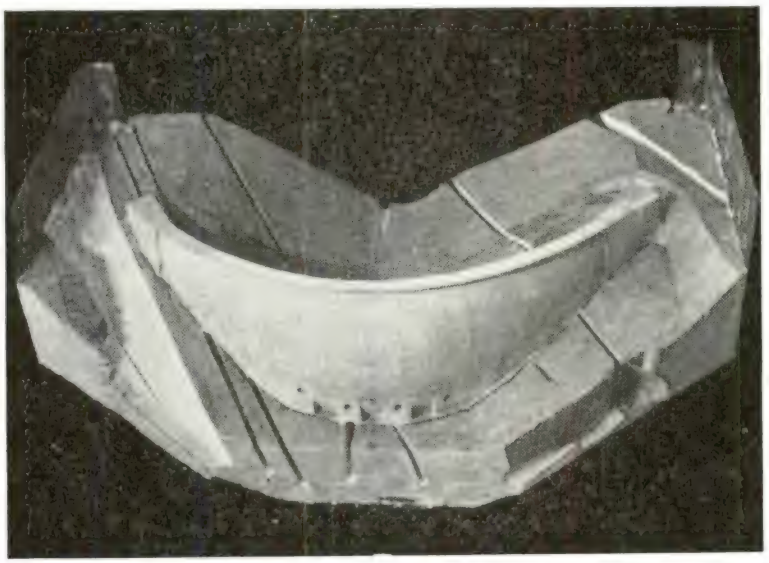


Fig. 17

The conclusions presented show that, save for foundations with very low moduli of elasticity, it is sufficient to determine an order of magnitude of the deformability of foundation rock masses. This means that accurate methods are not required; what matters is to obtain significant values.

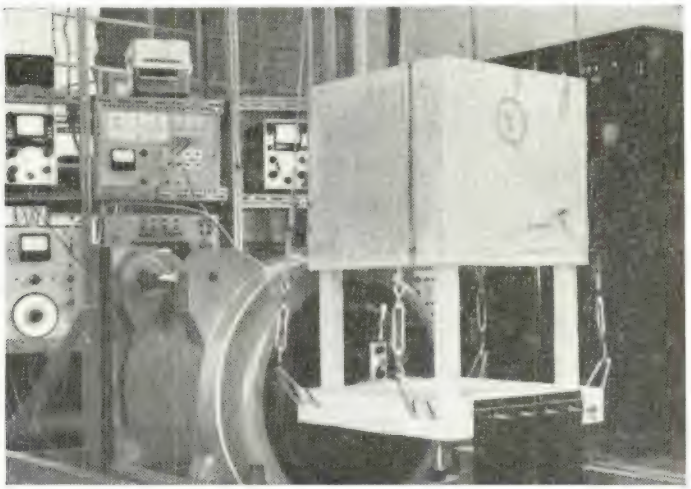


Fig. 18

It is wo th noting that faults, relevant joints and other geologic features are usually reproduced in our models. A model of an arch dam in which several faults were reproduced is shown in fig. 17. Notice that, provided a failure by sliding along a fault does not occur, the state of stress in a concrete dam of any type is, as a rule, only very slightly influenced by the presence of faults even if their width is considerable.

Still regarding the influence of displacements in the foundation, a technique was developed at the LNEC for applying in models the action of earthquakes, which are repoduced as random vibra tions, as they actually are [12]. The setup used is presented in fig. 18 which show s the electromagnetic generator of random vibrations, with the required distribution of spectral density of acceleration, coupled to the model of a building supported on 4 columns. The instruments

for measuring stresses, displacements and other magnitudes at points of the model can also be seen.

As said we pay great attention to the observation of the behaviour of trusctures [13].

In fig. 19 is shown a sketch of a setup for measuring deformations along adits in rock mas-

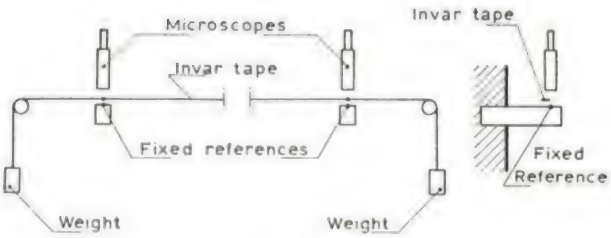


Fig. 19

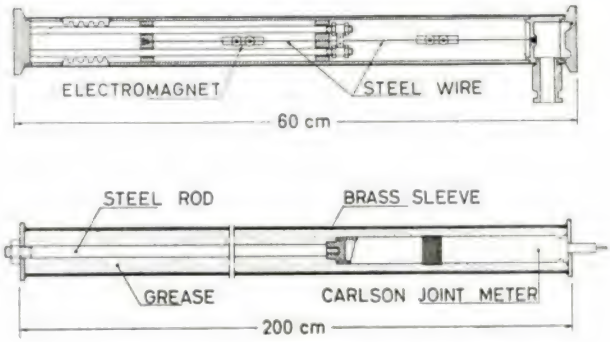


Fig. 20

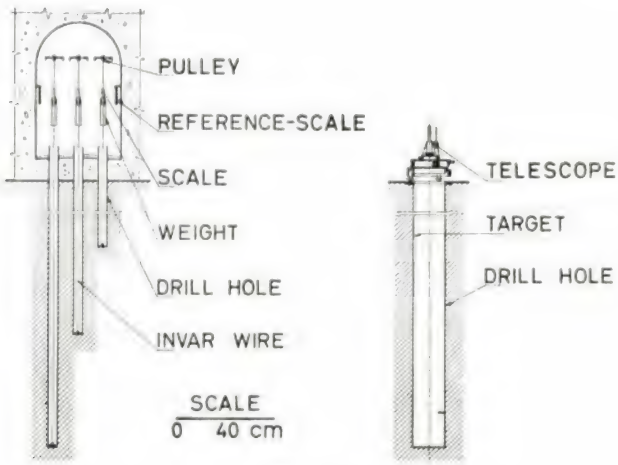


Fig. 21

ses, on basis of several meters. The variation of the distance between two points is determined by readings of reference marks on an invar-tape by means of microscopes connected to the points. It is thus possible to obtain an accuracy of 5×10^{-6} in the determination of strains. Two types of strain meters with long bases, whicg are applied inside boreholes in rock masses, are shown in fig. 20; these strain meters have been used in observations inside rock foundations of dams.

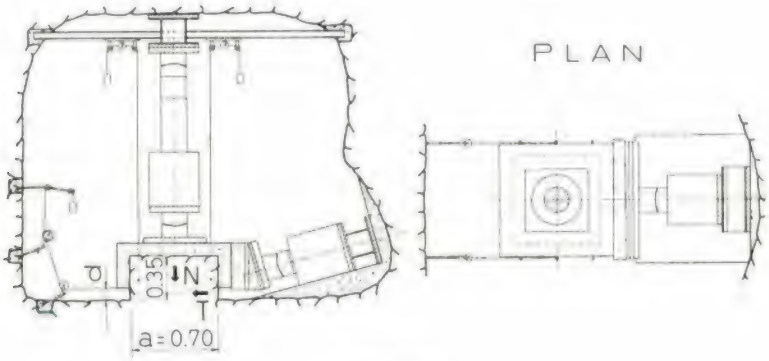


Fig. 22

For measuring the vertical displacements at different depths we use the setup presented at the left part of fig. 21; at the right is shown an optical plumb that we intend to use for measuring the two components of the horizontal displacement of points along a drill hole.

5. SHEAR STRENGTH

I will now describe the activities connected with the second basic problem of the characterization of rock masses: how to determine their strength. As is known, it is the shear strength as a rule that is of more interest in the equilibrium of rock masses.

The characterization of shear strength has been based mainly on *in situ* tests [1] [14]. Fig. 22 presents the setup we use, in which blocks with a 70 × 70 cm cross section are tested. In order to increase as much as possible the influence of the heterogeneity and of the cracking of the rock mass on its shear strength, the distance *d* is given the highest value for which tensile bending stresses do not occur. In fig. 23 is shown a machine recently developed for preparing the lateral faces of test blocks by means of a diamond disk. It is thus possible to reduce the disturbance in the rock mass, which with the usual techniques of preparation of the blocks can entirely conceal the results of the shear tests.

More than 250 *in situ* tests so far carried out with the described setup, not only on rock masses but also on joints and faults, form an invaluable body of experience.

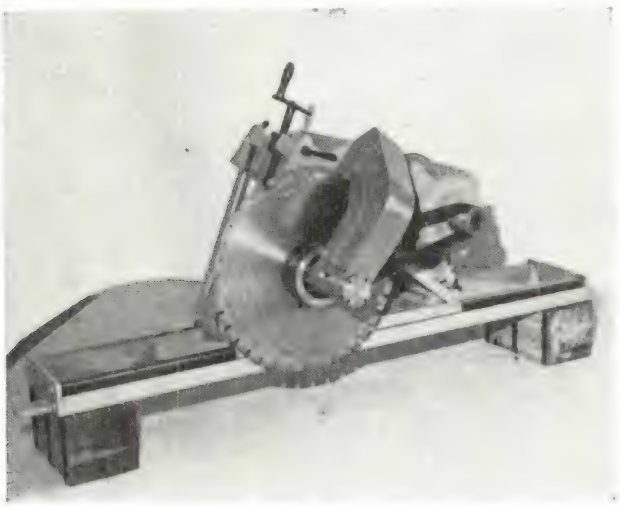


Fig. 23

Fig. 24 shows the values of the coefficient of friction and of the cohesion in an altered granitic rock mass in function of the water absorption of the rock, taken as quality index. The rock mass in question presents highly variable degrees of alteration, as the water absorption ranges from 3 to 30 %, from zone to zone. As can be seen, whereas the coefficient of friction decreases from 1.9 to 0.72, i.e. a reduction of about 2.5 times, when the quality index increases from 3 to 30, cohesion changes from 13 to 0.3 kg cm², i.e. is reduced as much as 40 times. I mention this fact because it is very general, i.e. the variation of the coefficient of friction along a rock mass is usually much less marked than the variation of the cohesion. This is very important, because it shows why, in the analysis of the stability of rock masses, the coefficient of friction can have a much lower factor of safety than the cohesion.

As for the factors of safety to be adopted in each case, we had occasion to study the problem having concluded that as a rule a concept of safety based on a reduction of the values of the mechanical properties of the rock mass is preferable to the usual concept, according to which the applied loads are assumed to increase until failure occurs [15].

From the hundreds of *in situ* shear tests carried out we conclude that as a rule the angle of friction, even in very altered rocks, exceeds 50° and

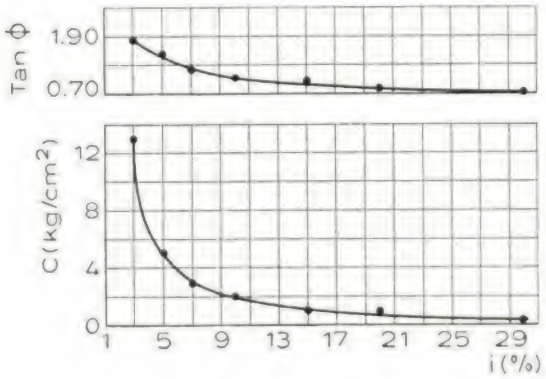


Fig. 24

even 55°, i.e. is fairly, high whereas cohesion, save in sound rocks, is very low [1]. This fact, together with the high factor of safety required for cohesion, leads us usually to neglect cohesion in the rock masses and, on the other hand, to use sometimes angles of friction appreciably higher than those commonly adopted.

As for the joints, *in situ* and laboratory tests have yielded rather low angles of friction even in the case of joints without clay infillings. In 16 *in situ* tests of joints occurring in schists and granites, 11 values lower than 35° were obtained. The coefficient of friction corresponding to 35° is 0.7, that is the value usually adopted in analyses of stability. As rock masses are usually divided by numerous joints, the results just mentioned clearly show the major role played by the interlocking

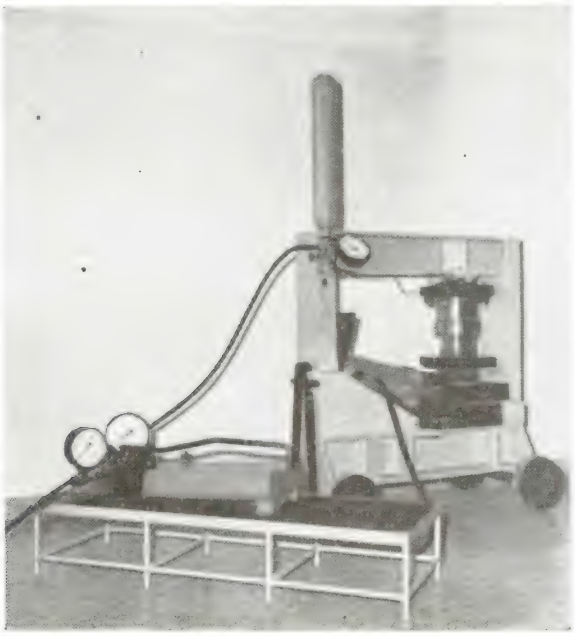


Fig. 25

of the blocks of which rock masses are made up, as otherwise the majority of foundations would not be stable. This indicates how important would be a theory enabling this interlocking effect to be calculated.

As said, shear tests are also carried out in laboratory. The machine used, in which specimens with cross sections up to 20×20 cm can be tested, is shown in fig. 25. We have recently started

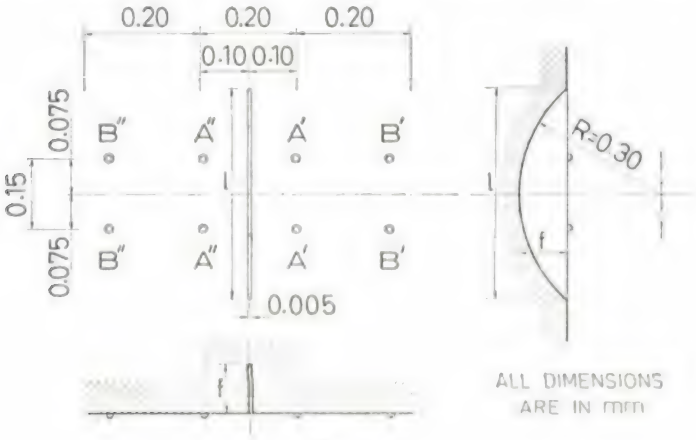


Fig. 26

Fig. 27

systematic comparisons of the values of the angle of friction in the joints as determined *in situ* and in laboratory tests. So far this comparison has shown a fairly satisfactory agreement between both values. The determination through laboratory tests of the angle of friction of the joints in rock masses themselves would be of great practical interest.

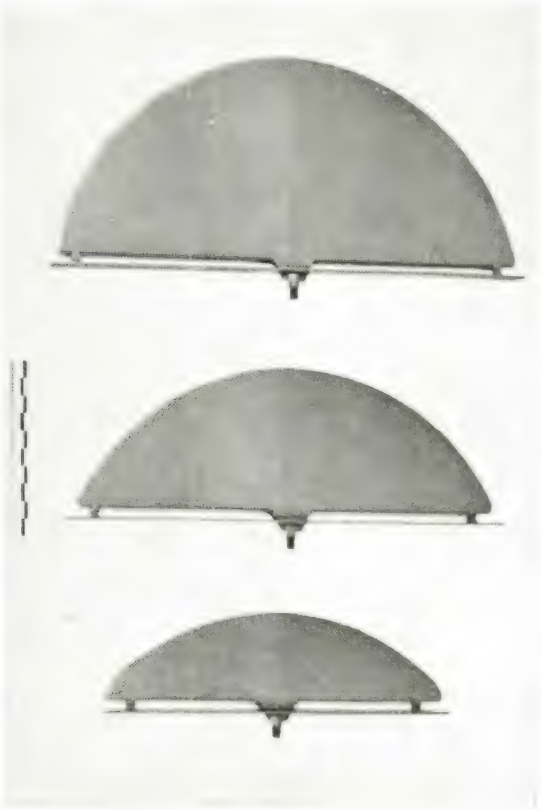


Fig. 28

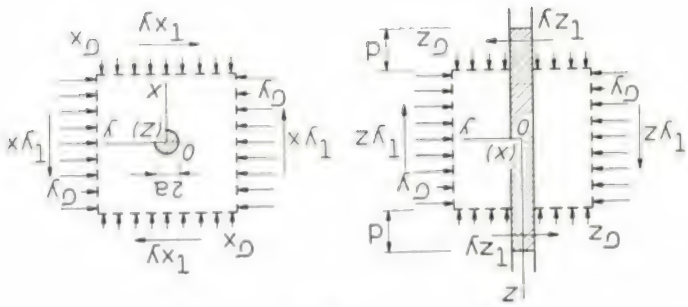


Fig. 29

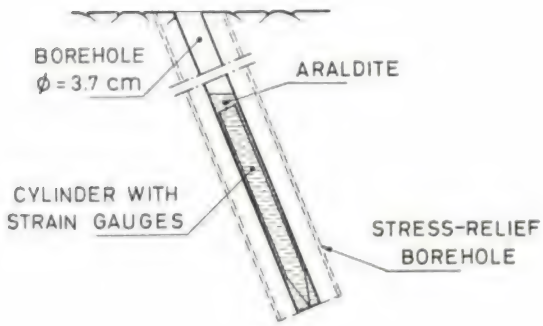


Fig. 30

6. DETERMINATION OF THE STATE OF STRESS

Something will be said now about the activities in connexion with the third problem posed by the characterization of a rock mass: namely, the determination of its state of stress.

In tunnels and underground power stations the state of stress has been determined in the walls by a stress relief method consisting in taking cores out by means of drilling or manual tools and in measuring the deformations with resistance strain gauges [16]. The results obtained have indicated the presence of tectonic stresses.

Due to the difficulties in the application of this method and to its limitations, a new technique was recently developed for applying the well-known stress restoring method, which is described in a paper presented at this Congress [17]. Its new feature is the fact that the slot is cut with a diamond disk, the segment obtained being shown in fig. 26. The slot cutting machine developed is presented in fig. 27; it is fitted with a disk 60 cm in diameter operated by an electric motor. The segment-shaped flat jacks to be installed in the slot for restoring the initial state of stress are presented in fig. 28. The jacks fit exactly in the slot without need of mortar or other material. After the test the flat jack is removed without difficulty. A series of flat jacks are used, by means of which stresses can be determined as the depth of the slot increases.

The method developed has the following advantages: i) it reduces disturbances in the rock mass to a minimum; ii) it is very rapid and inexpensive; iii) it makes it possible to detect any anomalous deformations while the slot is being cut; and iv) it enables the simultaneous determination of the modulus of deformability of the rock mass.

Determination of stresses in the walls of tunnels has a great interest as regards the state of stress near the tunnels themselves. But when the state of stress is to be obtained at a point inside a rock mass, such determination has two serious well-known disadvantages, namely, the need to consider stress--concentration factors around the tunnel, and above all the disturbances which the excavation of the tunnel creates in the rock mass. That is why a new method is being developed enabling the complete determination of the state of stress along a borehole. Considering a borehole in a rock mass along a direction OZ (Fig. 29), the method enables the three normal stresses σ_x, σ_y, σ_z, and the three shear stresses, τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{xy}, to be determined. The

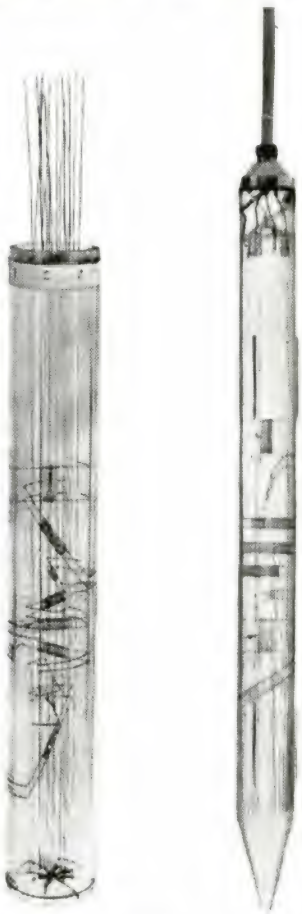
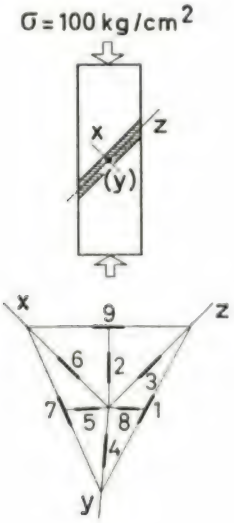


Fig. 31

Fig. 32

method essentially consists in (Fig. 30): i) drilling a hole with a small diameter, for instance 3.7 cm; ii) cementing on the wall of the hole a plastic cylinder in which are embedded 9 electric resistance strain gauges; iii) relieving the stresses in the rock mass around the cylinder by overcoring with for instance a 7.5 cm diameter. The cylinder is glued to the walls of the hole yb means of araldite which, previously placed at the bottom of the hole, is extruded when the cylinder containing the strain gauges is fitted into the hole. Fig. 31 shows at the left the strain gauges mounted in a transparent pipe inside which the plastic cylinder is moulded; at the right is seen one cylinder with the gauges embedded. A plastic cylinder inside a rock core is shown in fig. 32. In order to assess the accuracy of the method it was applied to prisms of rock maintained under a constant compression in a testing machine. The results obtained with a limestone prism, under a stress of 100 kg/cm², are presented in fig. 33. It can be seen that the values of the strains measured along the 9 directions indicated in the figure do agree with the expected strains, and that the components of the state of stress, in respect to the system of axis Oxyz, calculated from the measured strains are in a still better agreement with the imposed stresses.



	STRAINS (10^{-6})			STRESSES (kg/cm²)	
	Expected	Measured		Calculated	Imposed
$\epsilon_1 = \epsilon_8$	− 19 5	− 18 3	C_x	50	50
$\epsilon_2 = \epsilon_9$	26 3	33 0	C_y	0 31	0
ϵ_3	63	71	C_z	53	50
$\epsilon_4 = \epsilon_7$	− 10 2	− 10 5	T_{xy}	0 043	0
ϵ_5	49 1	48 8	T_{yz}	− 0 021	0
ϵ_6	20 0	19 8	T_{zx}	42 4	50

Fig. 33

7. FUTURE ACTIVITIES

Finally I would like to present our plans for the future. We intend to go on developing our activities, particularly in connexion with specific problems of tunnels and underground power sta-

tions. Furthermore we believe it is advisable to increase the proportion of our means invested in basic research, as the existing experience and knowledge ensure the efficiency of such an activity.

Given the present status of Rock Mechanics, we will go on paying a special attention to what I shall call the inquiry on the real behaviour of rock masses, i.e. their *in situ* characterization, and the observation of the behaviour of the structures built on or inside them. In parallel with this activity, the studies in laboratory of the properties of the rocks will go on, having always in mind their relationship with the properties of the rock masses. As another item of our future activities I would mention a more intensive use of models not only for predicting the behaviour of rock masses in definite cases, i.e. in connexion with given structures, but also for investigating phenomena in general.

The theorization of the knowledge obtained in both field and laboratory investigations will be carried forward as far as possible.

REFERENCES

1. Rocha, M. — *Mechanical Behaviour of Rock Foundations in Concrete Dams.* 8th Int. Congress on Large Dams, vol. I, pag. 785, Edinburgh, 1964.
2. Hambol, A. — *A Quantitative Classification of the Weathering and Weatherability of Rocks.* Proc. 5th Int. Cont. Soil Mech. Found. Eng., vol II, pág. 771, Paris, 1961.
3. Mendes, F. M., Aires-Barros, L. and Rodrigues, F. P. — *The Use of Modal Analysis in the Mechanical Characterization of Rock Masses.* Proc. 1st Congress Int. Soc. Rock Mech., vol. I, pág. 217, Lisbon, 1966.
4. Nascimento, U., Branco, F. and Castro, E. — *Identification and Petrifaction in Soils.* Proc. 5th Int. Conf. Soil Mech. Found. Engg., vol. I, pág. 80, Montreal, 1965.
5. Rocha, M., Serafim, J. L. and Silveira, A. F. — *Deformability of Foundation Rocks.* 5th Congress on Large Dams, vol. III, pág. 531, Paris, 1955.
6. Rocha, M., Silveira, A., Grossmann, N. and Oliveira, E. — *Determination of the Deformability of Rock Masses Along Boreholes.* Proc. 1st Congress Int. Soc. Rock Mech. vol. I., pág. 697, Lisbon, 1966
7. Rodrigues, F. P. — *Anisotropy of Granites.* Proc. 1st Congress Int. Soc. Rock Mech., vol. I, pág. 721, Lisbon, 1966.
8. Mendes, F. M. — *About the Anisotropy of Schistose Rocks.* Proc. 1st Congress Int. Soc. Rock Mech., vol. I pág. 607, Lisbon, 1966.
9. Pinto, J. L. — *Stresses and Strains in an Anisotropic-Orthotropic Body.* Proc. 1st Congress Int. Soc. Rock Mech, Lisbon, 1966.
10. Rocha M., Serafim J. L., Fernandes, A. J. and Costa, J. P. — *Experimental Studies of Buttress and Multiple Arch Dams.* 7th Congress on Large Dams, vol. III, pág. 641, Rome, 1961.
11. Lane, R. G., Serafim, J. L. — *The Structural Design of Tange Soleyman Dam.* Proc. Institution of Civil Eng. vol. 22, July, 1962.
12. Borges, J., Pereira, J. et allii — *Seismic Studies on Concrete Dam Models.* Symposium on Concrete Dam Models, Lisbon, 1963.
13. Rocha, M. — *In Situ Strains and Stress Measurements* in: Zienkiewicz O. C. and Holister G. S. «Stress Analysis», London, New York and Sydney, John Wiley & Sons, 1965, págs. 425-461.
14. Serafim, J. L. and Lopes, J. B. — *In Situ Shear Tests and Triaxial Tests of Foundation Rocks of Concrete Dams.* Proc. 5th Int. Conf. Soil Mech. Found. Engg., vol. I, pág. 533, Paris, 1961.
15. Rocha, M. — *Some Problems on the Failure of Rock Masses.* Colloquium of the Int. Assoc. for Rock Mechanics Salzburg, 1963.
16. Serafim, J. L. — *International Stresses in Galleries.* 7th Congress on Large Dams, vol. II, pág. 141, Rome, 1961
17. Rocha M., Lopes, J. B., Neves da Silva — *A New Technique for Applying the Method of the Flat Jack in the Determination of Stresses Inside Rock Masses.* Proc. Ist Congr. Int Soc. Rock Mech., vol. II, pág. 57, Lisbon, 1966.

O novo Nível automático de engenheiro

WILD NAK 2

com círculo horizontal

WILD
HEERBRUGG

Para nivelamentos de média e grande precisão; com micrómetro de lâmina de faces plano-paralelas para nivelamentos de grande precisão.

Erro médio para 1 Km de nivelamento duplo: ± 1,5 mm

Erro médio para 1 Km de nivelamento duplo com micrómetro: ± 0,4 mm

Luneta de 30 × de aumento com imagem direita de observação

Solicitem catálogo ou demonstração aos representantes exclusivos

WILD PORTUGAL, LDA.

PRAÇA DAS ÁGUAS LIVRES, 8
LISBOA - 2 — TELEFONE 68 11 27

DESPOEIRAGEM

FILTROS TECIDOS EM PEÇAS, PANOS, SACOS, MANGAS

DE QUALQUER FIBRA NATURAL OU SINTÉTICA

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEF.: 52093-52094
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

DELEGAÇÃO - LISBOA
R.S.Pedro de Alcântara, 1
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
Rua Serpa Pinto, 60
C.P.2178 - Tel.4226

MOÇAMBIQUE
L.Marques - C.P.982 - Tel.741121
Beira - C.P. 1002 - Tel. 71497

C. D. U. 536.753 : 532.517

O MÍNIMO DE PRODUÇÃO DE ENTROPIA NO ESCOAMENTO UNIFORME DUM FLUIDO NEWTONIANO

por J. DELGADO DOMINGOS
Prof. I. S. T.
Do NEEM do I. A. C.

RESUMO

Demonstra-se que no escoamento laminar e uniforme dum fluido Newtoniano a condição de mínimo de produção de entropia é equivalente às equações de Navier-Stokes.

Usando a formulação variacional das equações do movimento que decorre da demonstração anterior mostra-se como podem obter-se soluções analíticas exactas ou aproximadas para o escoamento laminar, uniforme, em condutas de secção constante. Como exemplo trata-se o caso duma secção rectangular para o qual se deduzem as soluções exactas e se comparam as soluções aproximadas.

Também para a secção rectangular se representa gràficamente o factor de resistência em função da relação entre os lados e se mostra como a utilização do factor de resistência deduzido para tubos pode conduzir a erros muito apreciáveis.

SYNOPSIS

The author demonstrates that for a Newtonian fluid in laminar, uniform flow, the condition of minimum entropy production is equivalent to the Navier-Stokes equations.

Using the variational formulation, resulting from the former demonstration, it is shown how exact or aproximate analytical solutions for laminar, uniform flow in conduits with constant section, can be obtained. As an example, the exact solutions for a revtangular section are calculated and compared with the aproximates ones.

Also for a rectangular section, the friction factor is plotted as a function of the sides ratio, and it is shown how the use of the friction factor deduced for pipes can introduce important errors in the results.

1 — INTRODUÇÃO

Foi demonstrado por Prigogine [1] e posteriormente generalizado por De Groot [2] na termodinâmica irreversível linear que para sistemas contínuos em equilíbrio mecânico (1) e possuindo coeficientes fenomenológicos constantes a produção de entropia é mínima em regime estacionário.

A nosso conhecimento, porém, não se tratou ainda, pelo menos explìcitamente, o caso de sistemas abertos com $v \neq 0$ (2) e tendo em conta a produção da entropia devida ao aparecimento de tensões tangenciais de viscosidade (3). Este aspecto tem para as aplicações na engenharia um particular interesse, não apenas pelo seu conteúdo físico intrínseco mas também como meio natural de introdução das técnicas do cálculo variacional na solução exacta ou aproximada de problemas de grande complexidade analítica. O presente trabalho insere-se nesta via, na medida em que pretende mostrar como algumas técnicas simples do cálculo das variações permitem a solução analítica aproximada de certo tipo particular de problemas em mecânica dos fluidos e o sentido físico intrínseco que possui a sua formulação.

---

(1) No sentido restrito em que a velocidade dum elemento do contínuo não varia no tempo, acompanhando-o no seu movimento $\left(\frac{Dv}{Dt} = 0\right)$.

(2) No caso de sistemas com mais de um componente onde se verifica difusão o mesmo pode permutar massa sendo $v = 0$ [2].

(3) Note-se que pode ser simultâneamente $\text{rot}\, v = 0$ e $\text{div}\, v \neq 0$ o que dará origem à produção de entropia se não é nulo o segundo coeficiente de viscosidade. Todavia neste caso não existem tensões tangenciais.

2 — MODELO FÍSICO

2.1 — Na sequência da exposição admitiremos que:

- O sistema é constituído por um fluido Newtoniano incompressível, de viscosidade constante.
- O sistema evolui a temperatura constante e em regime laminar.
- A fluição verifica-se num canal de eixo rectilíneo e secção recta (A) constante.
- O eixo oz coincide com o eixo do canal e designando por u a única componente não nula da velocidade, só nos ocupamos da região em que $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.
- As únicas forças aplicadas por unidade de massa são as que derivam do potencial gravítico.

2.2 — Nas condições do modelo, a produção de entropia por unidade de volume e de tempo será [3]:

1) $$\sigma = \frac{ds}{dt} = \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (^1)$$

sendo μ — viscosidade dinâmica
s — a entropia produzida por unidade de volume devido ao trabalho irreversível das forças tangenciais
t — tempo

e o aumento de entropia por unidade de tempo no elemento de volume Adz será

$$\frac{ds}{dt} = \int_A \sigma \, dAdz$$

donde

2) $$D = \int_A \sigma \, dA = \frac{ds}{dt \, dz} = \int_A \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dA$$

2.3 — Da conservação da massa resulta também que, sendo ρ a massa específica

3) $$G = \int_A \rho u \, dA$$

e G e D são constantes para todas as secções rectas do escoamento.

3 — MÍNIMO DE PRODUÇÃO DE ENTROPIA

3.1 — Se considerarmos G como um constrangimento imposto, da família de superfícies que verificam 3) haverá uma que torna 2) extremo se existir uma funcional u (x, y) tal que

4) $$\delta D = o = \delta \int_A \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dA$$

---

(1) O termo $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \varphi$ designa-se por vezes como função de dissipação.

sujeito a

5) $$\int_A \rho u \, dA = G$$

e obedecendo no contorno de A às condições impostas para u que caracterizam o problema físico

6) $$f(u) = 0$$

3.2 — Demonstra-se em cálculo das variações [4], que 4) e 5) são equivalentes à determinação do extremo de

7) $$\int_A \left(\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda \rho u \right) dA$$

sendo λ uma constante a determinar posteriormente.

As condições necessárias para a estacionaridade de 7) obtém-se das equações de Euler [4] e reduzem-se neste caso a

8) $$2 \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \lambda \rho = o$$

Da família de superfícies de parâmetro λ que satisfazem 8) e 6) é solução do problema a que verifica 5) a qual permite deste modo a determinação da constante arbitrária introduzida.

3.3 — O movimento do fluido rege-se pelas equações de Navier-Stokes que nas condições do modelo se reduzem a

9) $$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = - \frac{dp}{dz} + \rho g_z$$

sendo p a pressão hidrostática e g_z a componente segundo oz da força por unidade de massa.

As equações de Navier-Stokes, juntamente com as condições aos limites $f(u) = 0$ determinam u univocamente ([5]). Desta unicidade resulta que a condição 5) é equivalente a impor um certo valor para o segundo membro de 9) do que resulta que λ, parâmetro da família de superfícies que satisfazem 8) e 6) seja determinado por 5) como

10) $$\lambda = 2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} + g_z \right)$$

3.4 — De 8), 9) e 10) conclui-se que a existência dum extremo da produção da entropia sujeito à condição de em cada secção se escoar o mesmo caudal mássico é equivalente à exigência de se verificarem as equações de Navier Stokes sujeitas sobre o contorno às mesmas condições.

A condição necessária de extremo é também suficiente e poder-se-ia demonstrar, considerando a segunda variação de D, que esse extremo é um mínimo.

Nas condições do modelo pode pois considerar-se como um teorema que:

— *O perfil das velocidades em escoamento uniforme é o que torna mínima a produção de entropia para um caudal imposto.*

([5]) Se as condições sobre o contorno envolvessem apenas as suas derivadas a solução seria indeterminada a menos numa constante aditiva. Todavia, mesmo neste caso se manteriam as conclusões que se seguem, as quais se preferiu obter do modo que se apresenta, embora sacrificando o rigor formal, porque mais simples e fisicamente mais intuitivo.

Dada a natureza do problema variacional, é imediata [4] a demonstração de que a formulação anterior é equivalente ([6]) a

— *O perfil das velocidades em escoamento uniforme é o que torna máximo o caudal para um valor imposto da produção da entropia.*

3.5 — O regime estacionário corresponde pois ao de menor dissipação de energia mecânica compatível com os constrangimentos impostos ao sistema. Atendendo a que

$$D = \int_A \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dA \quad > 0$$

é intrìnsecamente positivo ou nulo, a ausência de dissipação corresponderá a $\mu = 0$ ou a $u =$ constante $= c$.

No primeiro caso trata-se dum fluido perfeito.

No segundo caso seria necessário que também no contorno $u = c$ e o fluido comportava-se como um sólido indeformável ([7]).

4 — APLICAÇÕES

Tornar mínimo

11) $$I = \int_A \left(\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 B u \right) dA$$

Sendo

12) $$B = \frac{dP}{dz} - \rho g_z$$

é, como se viu, equivalente à solução das equações de Navier Stokes sujeito à mesma condição sobre o contorno

13) $$f(u) = 0$$

A vantagem da formulação apresentada não consiste porém, à parte o seu sentido físico, na redução do problema à solução das equações de Navier Stokes mas sim no tratamento directo de 11) por alguns dos métodos conhecidos do cálculo das variações sobretudo quando se pretendem soluções analíticas aproximadas ([8]).

Um desses métodos, o método de Ritz [4] consiste em propor como solução uma função

14) $$F(x, y, c_1 \ldots c_n) = \sum_1^n c_i \varphi_i (x, y)$$

em que as φ_i (x, y) são linearmente independentes e verificam 13) e determinar os c_i de tal modo que I, seja mínimo.

As funções φ_i à parte verificaram (13) e serem linearmente independentes são em princípio arbitrárias.

Substituindo (14) em (11) resultará

15) $$I = \int_A \left\{ \mu \left[\left(\sum_1^n c_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_1^n c_i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 B c_i \varphi_i \right\} d A$$

([6]) O problema clássico, que deu o nome a este capítulo do cálculo variacional — problemas isoperimétricos — foi o da determinação da figura plana que possui a maior área para o menor perímetro, ou a que para um dado perímetro possui a maior área; em ambos os casos trata-se do círculo.

([7]) Se considerarmos este como um fluido de $\mu = \infty$, de ser $D \neq 0$ resultaria ser também $u = c$.

([8]) A obtenção destas poder-se-ia fazer sem a prévia formulação variacional, como seria por exempo o método de Galerkin. Todavia, conhecida a expressão variacional correspondente à equação dada não apenas se obtém um novo sentido físico para o fenómeno como em certos casos a solução é mais simples de obter.

ou

16) $$I = \sum_{ij} \alpha_{ij} c_i c_j + \sum_i \beta_i c_i = f(c_i)$$

$$i, j = 1 \ldots n$$

onde

17) $$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} = \int_A \mu \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] dA$$

$$\beta_i = 2B \int_A \varphi_i \, dA$$

como I é apenas função dos c_i a condição de estacionaridade exprime-se por

18) $$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0 = \alpha_{ii} c_i + \sum_j \alpha_{ij} c_j + \beta_i$$

$$i, j = 1 \ldots n$$

Sistema de n equações lineares a n incógnitas que determinam os c_i.

Das relações anteriores pode verificar-se ainda que

$$F_{\text{médio}} = \frac{1}{2BA} \sum_i \beta_i c_i$$

Pode demonstrar-se que se os φ_i constituirem um sistema completo [4] $F = \Sigma c_i \varphi_i$ converge para a solução exacta quando n aumenta (eventualmente quando $n \longrightarrow \infty$).

Do ponto de vista das aplicações, a ilação é que da forma escolhida para φ_i dependerá a necessidade dum maior ou menor número de termos para uma dada aproximação. Na escolha de φ pode ser-se guiado pelo sentido físico do problema, por analogia com situações análogas, por intuição . . .

4.1 — Como primeiro exemplo de aplicação, considere-se o escoamento entre dois planos à distância 2 a segundo x, e infinitas segundo y z, cuja solução exacta é sobejamente conhecida.

O problema trata-se a uma dimensão, e usando o método proposto consiste em tornar mínimo

19) $$I = \int_{-a}^{+a} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2Bu \right] dx$$

Como condição ao limite consideramos a ausência de escorregamento sobre a superfície

20) $$u = 0 \qquad \text{para} \qquad x = \pm a$$

O anulamento da função proposta para $x = \pm a$ obtém-se simplesmente considerando como factor comum a φ_i o termo $(a^2 - x^2)$.

Deste modo

21) $$u = (a^2 - x^2) \left[c_1 + c_2 x + \ldots + c_n x^n \right]$$

satisfaz as condições exigidas de independência linear e verificação de 20).

Consideremos apenas a primeira aproximação $c_1 \neq 0 \quad c_2 = c_n = 0$.

Obtém-se, substituindo em 19) e integrando

$$I = \frac{4}{3} a^3 \left[\mu c_1^2 + B c_1 \right]$$

e de

$$\frac{d\,I}{d\,c_1} = 0 = 2\,\mu\,c_1 + B$$

resulta $$c_1 = -\frac{B}{2\,\mu}$$

donde finalmente, atendendo à definição de B

22) $$u = \frac{1}{2\,\mu}\left(-\frac{\partial P}{\partial z} + \rho\,g z\right)\left(a^2 - x^2\right)$$

Se tivessemos considerado mais termos na expressão 21) além do primeiro, obteríamos $c_2 = \ldots = c_n = 0$, o que resulta do facto de 22) ser uma solução exacta, como pode verificar-se.

É também

$$u_m = -\frac{1}{3}\,a^2\,\frac{B}{\mu}$$

4.2 — Como segundo exemplo considere-se um canal de secção rectangular e lados 2 a e 2 b, respectivamente.

Como condição sobre o contorno será, como habitualmente:

23) $$u = 0 \quad \text{para} \quad \begin{array}{l} x = \pm\,a \\ y = \pm\,b \end{array}$$

Estas condições poderão ser satisfeitas tomando como factor comum das funções φ_i, $(x^2 - a^2)\,(y^2 - b^2)$.

A simetria de u em relação aos eixos sugere que as funções φ_i em produto com $(y^2 - b^2)$ sejam formas quadráticas.

Proporemos

$$u = (x^2 - a^2)\,(y^2 - b^2)\,[c_1 + c_2\,x^2 + c_3\,y^2 + \ldots + c_n\,x^n\,y^n]$$

4.2.1 Considerando apenas a primeira aproximação ([9]), obteremos sucessivamente

$$\alpha_{11} = \frac{128}{45}\,a^3\,b^3\,[a^2 + b^2]\,\mu$$

$$\beta_1 = \frac{32}{9}\,a^3\,b^3\,.\,B$$

$$\frac{d\,I}{d\,c_1} = 0 = \frac{128}{45}\,a^3\,b^3\,[a^2 + b^2]\,\mu + \frac{16}{9}\,a^3\,b^3\,B = 0$$

$$c_1 = -\frac{5}{8}\,\frac{B}{\mu}\cdot\frac{1}{(a^2 + b^2)}$$

donde

24) $$u = -\frac{5}{8}\,\frac{B}{\mu\,(a^2 + b^2)}\,(a^2 - x^2)\,(b^2 - y^2)$$

([9]) Como imediatamente se conclui das expressões gerais 16) e 17) a parte mais trabalhosa do método é a determinação dos α_{ij} e de β_i. Deste modo, se após a aproximação com n termos, desejarmos considerá-la com n + 1, todos os coeficientes já calculadas se mantêm.

25) $$u_m = -\frac{5}{18} \cdot \frac{B}{\mu} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

4.2.3 — Em segunda aproximação consideremos apenas o caso em que $a = b$. Dada a simetria relativamente às diagonais será $c_2 = c_3$ e virá

$$u = (a^2 - x^2)\ (a^2 - y^2)\ [c_1 + c_2\ (x^2 + y^2)]$$

Obtendo-se ([10])

$$c_1 = -\ 0{,}29219\ \frac{B}{\mu\, a^2}$$

$$c_2 = -\ 0{,}059228\ \frac{B}{\mu\, a^4}$$

donde :

26) $$u = -\frac{B}{\mu}\ (a^2 - x^2)\ (a^2 - y^2)\ [0{,}29219 + 0{,}059228(x^2 + y^2)]$$

27) $$u_m = -\ 0{,}1404\ a^2\ \frac{B}{\mu}$$

4 — MÉTODO DE KANTOROVICH

4.3 — Em vez do método de Rietz pode usar-se, em muitos casos com vantagem, o método de Kantorovich ou das equações diferenciais ordinárias.

Neste método propõe-se a solução combinando funções conhecidas de uma das variáveis com funções incógnitas da outra. Reduzindo o integral duplo a um integral simples por integração na variável em que as funções são conhecidas e estabelecendo as condições de estacionaridade do integral simples obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias que determinarão as funções incógnitas.

Exemplificando o método para o caso em estudo e usando apenas a primeira aproximação proporemos

28) $$u = (b^2 - y^2)\ f\ (x)$$

substituindo em 11), virá

29) $$I = \int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{b} \left\{ \mu\, [\, (b^2 - y^2)^2\, f'^2 + 4\ y^2\ f^2] + 2\ B\ (b^2 - y^2)\ f \right\} dy$$

e efectuando a integração em y

30) $$I = \int_{-a}^{a} \left\{ \mu \left[\frac{16}{15}\, b^5\, f'^2 + \frac{8}{3}\, b^3\ f^2 \right] + \frac{8}{3}\, B\, b^3\, f \right\} dx$$

([10]) Um problema inteiramente análogo no domínio da Elasticidade é apresentado em [6], pág. 283, relativamente à torção plana. Se Φ for a função das tensões, e M o momento de torsão, demonstram-se fàcilmente as seguintes relações

$$u = -\frac{B}{2\,\mu\, G\, \Theta}\ \Phi\ ,\quad u_m = -\frac{B}{\mu}\ \frac{M}{4\, A\, G\, \Theta}$$

que são sempre válidas se Φ e u obedecem sobre o contorno a $\Phi = u = 0$.

A condição de estacionaridade de 30) exprime-se pela Equação de Euler correspondente ([11]):

$$\frac{d}{dx}\left[\mu \frac{32}{15} b^5 f'\right] - \mu \frac{16}{3} b^3 f - \frac{8}{3} b^3 B = 0$$

ou

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{5}{2b^2} f \quad \frac{5}{4} \cdot \frac{B}{\mu b^2} = 0$$

Equação diferencial ordinária de coeficientes constantes cujo integral geral é

$$f = c_1 \; e^{\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b}} + c_2 \; e^{-\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b}} - \frac{1}{2} \frac{B}{\mu}$$

As constantes de integração determinam-se de $f = 0$ para $x = \pm a$ obtendo-se finalmente

$$f = -\frac{1}{2} \frac{B}{\mu} \left[1 - \frac{\cos h \left(\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b}\right)}{\cos h \left(\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}\right)} \right]$$

donde

31) $$u = -\frac{1}{2} \frac{B}{\mu} (b^2 - y^2) \left[1 - \frac{\cos h \left(\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{b}\right)}{\cos h \left(\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b}\right)} \right]$$

32) $$u_m = -\frac{B}{3\mu} b^2 \left[1 - \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{b}{a} \tang h \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{a}{b} \right]$$

4.4 — A solução exacta pode obter-se tanto pelo método de Rietz como pelo de Kantorovich, desde que se proponha para u uma expressão sob a forma duma série infinita de funções que formam um sistema completo no domínio.

Usando o método de Rietz e propondo

$$u = \sum_{m=1,3,5 \ldots}^{\infty} \sum_{n=1,2,5}^{\infty} c_{mn} \cos \frac{m \pi x}{2a} \cos \frac{m \pi y}{2b}$$

([11]) No caso geral de $\int_{x_0}^{x_1} F\,[x, f_1(x), f_2(x) \ldots, f_n(x), f_1'(x) \ldots f'_n(x)]\, dx$

as condições de estacionaridade, Equações de Euler, são [4]:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'_1}\right) - \frac{\partial F}{\partial f_1} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'_n}\right) - \frac{\partial F}{\partial f_n} = 0$$

que determinam as n funções incógnitas. As constantes de integração obtêm-se das condições aos limites.

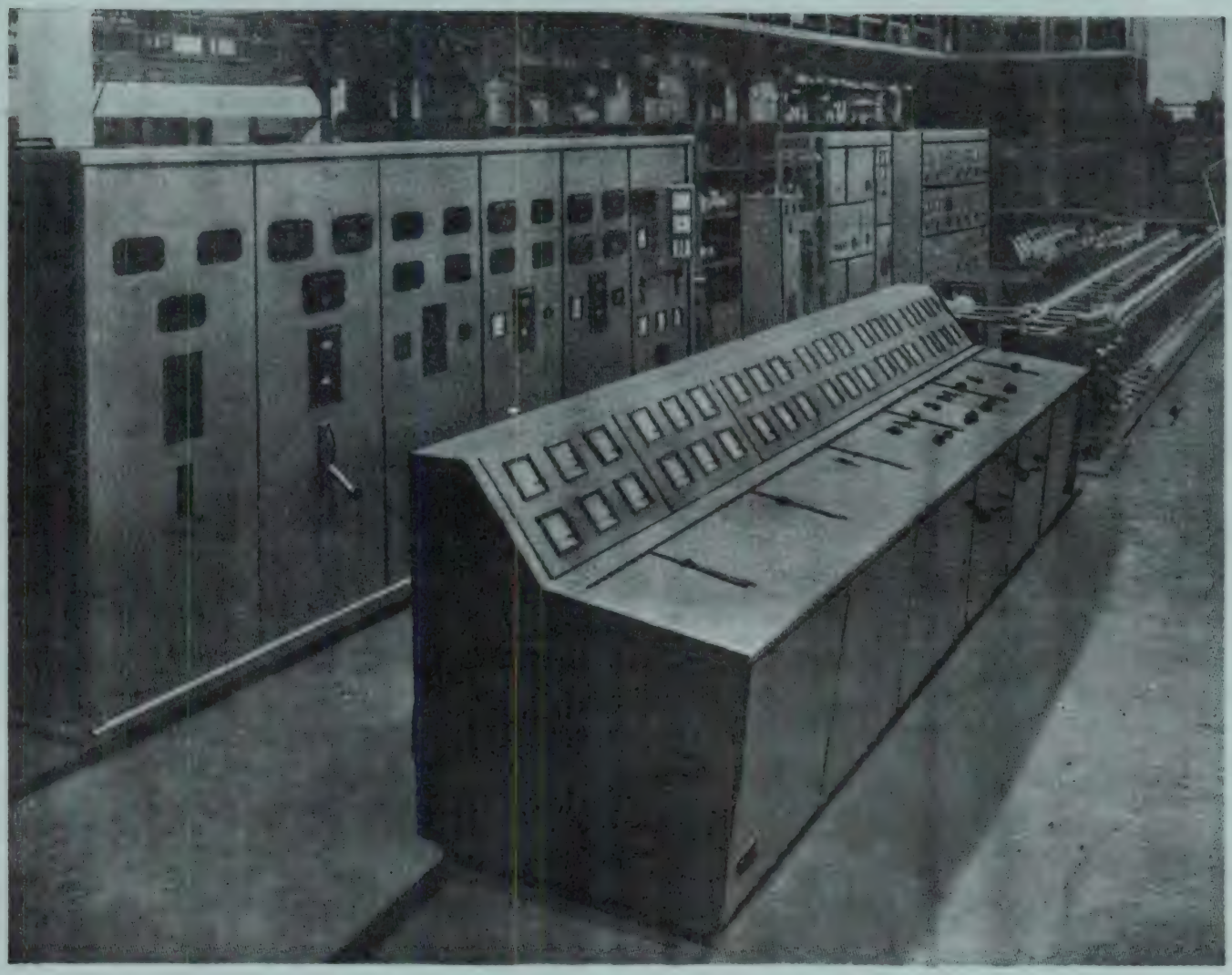
JAYME DA COSTA, L^DA

MECÂNICA E ELECTRICIDADE EM TODAS AS APLICAÇÕES

PORTO
Praça da Batalha, 12
Telef. 2 28 12 (PPC)

LISBOA
Rua dos Correeiros, 14
Telef. 32 70 35 (PPC)

LUANDA
Cx. Postal 5174
Telef. 4743

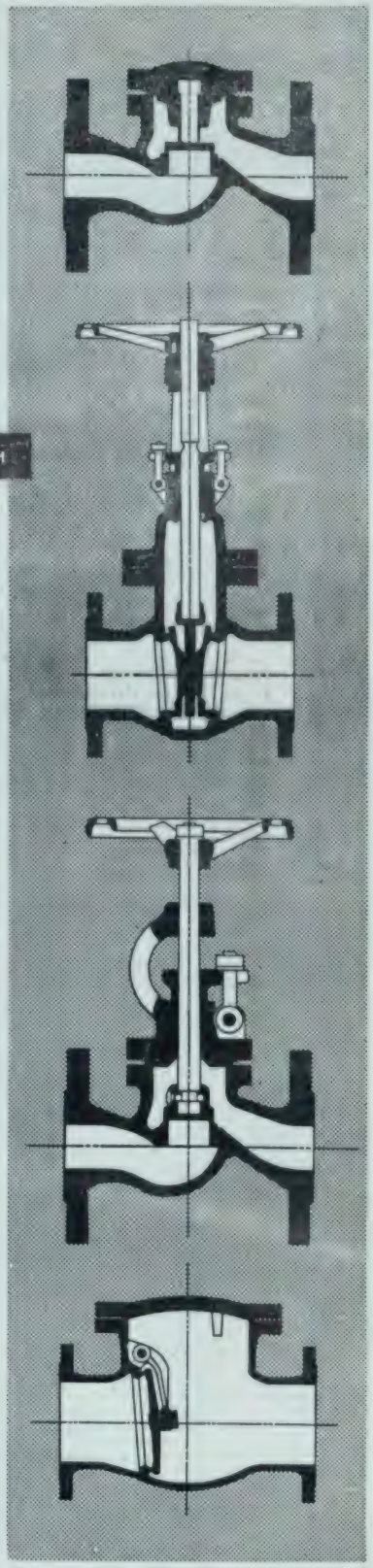


Material fabricado nas nossas oficinas, pronto para expedição

- Fabricação de aparelhagem eléctrica de alta e baixa tensão
- Equipamentos electromecânicos completos para centrais e fábricas
- Postos de transformação tipo monobloco
- Quadros blindados, capsulados e em armário
- Armaduras de iluminação de todos os tipos
- Contadores eléctricos e instrumentos de medida
- Telemedida e telecomando
- Instalações elevatórias de água
- Instalações de saneamento e esgotos
- Ferramentas de corte
- Motores Diesel industriais e marítimos
- Fogões eléctricos
- Frigoríficos
- Ventilação e condicionamento de ar
- Aparelhagem de Raios X e electromedicina

válvulas

- passagem
- retenção
- regulação
- cunha



PARA LÍQUIDOS, VAPORES E GASES (INCLUINDO NH_3 E SO_2) EM

ferro fundido
ferro fundido com grafite esferoidal
aço vasado
aço inoxidável

DN 10 mm até 600 mm **PN 6 a 40 kg/cm²**

conforme as normas **DIN** e **ASA**

VÁLVULAS DE SEGURANÇA, DE REDUÇÃO, ELECTROMAGNÉTICAS E VÁLVULAS ESPECIAIS

- estudos
- projectos
- orçamentos
- assistência técnica

FENAL

SOCIEDADE PORTUGUESA DE VÁLVULAS, LDA.

SEDE: Rua Academia das Ciências, 5 - Telef. 32 00 11 (8 linhas) - Lisboa

FILIAL: Praça D. João I, 5-2º - Telef. 2 47 71 - Porto

que òbviamente satisfazem o $u = 0$ para $x = \pm a$ $y = \pm b$ obtém-se [5]:

$$33) \qquad u = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5\ldots}^{\infty} - \frac{64}{\pi^4} \cdot \frac{B}{\mu} \cdot \frac{a^2 (-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{m\,n\,(m^2 + F^2 n^2)} \cos \frac{m \pi x}{2a} \cos \frac{n \pi y}{2b}$$

onde $\qquad F = \dfrac{a}{b}$

$$34) \qquad \text{e} \qquad u_m = - \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \sum_{m=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{256}{\pi^6} \cdot \frac{a^2}{m^2\,n^2\,(m^2 + F^2 n^2)} \frac{B}{\mu}$$

Usando o método de Kantovorich ter-se-ia partido de

$$35) \qquad u = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \cos \frac{n \pi y}{2b} \; f(x)$$

e obter-se-ia ([12])

$$36) \qquad u = - \frac{16\,b^2}{\pi^3} \frac{B}{\mu} \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\cos h \dfrac{n \pi x}{2b}}{\cos h \dfrac{n \pi a}{2b}} \right] \cos \frac{n \pi y}{2b}$$

e atendendo a que

$$\frac{16\,b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} \cos \frac{n \pi y}{2b}$$

é o desenvolvimento em série de Fourior de $\frac{1}{2}(b^2 - y^2)$ no intervalo $(-b, b)$, a expressão 36) assume a forma mais simples:

$$37) \qquad u = - \frac{B}{\mu} \left[\frac{1}{2} (b^2 - y^2) - \frac{16\,b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} \frac{\cos h \left(\dfrac{n \pi x}{2b} \right)}{\cos h \left(\dfrac{n \pi a}{2b} \right)} \cdot \cos \frac{n \pi y}{2b} \right]$$

Por outro lado

$$38) \qquad u_m = - \frac{b^2}{3} \frac{B}{\mu} \left[\frac{192}{\pi^5} \frac{b}{a} \sum_{n=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{tangh} \left(\frac{n \pi a}{2b} \right) \right]$$

4.5 — Comparação de soluções.

4 5.1 — Para apreciação do valor relativo das várias soluções aproximadas faz-se seguidamente a comparação numérica do valor médio da velocidade e do seu máximo, usando as várias expressões apresentadas.

([12]) As expressões que se seguem correspondem às apresentadas em [6] p. 276 muito embora obtidas partindo da condição de que 33) seja solução da equação às derivadas parciais que exprime a estacionaridade de 11).

Valores de $K = \dfrac{u_m}{-\dfrac{B}{\mu} b^2}$

F = a/b (*)	1	2	3	∞
Solução exacta	0,1402	0,2286	0,2633	0,3333
Método de Kantorovich 1.ª ap.	0,1396	0,2283	0,2630	0,3333
Método de Rietz 1.ª ap.	0,1388	0,2222	0,2500	0,2777
Método de Rietz 2.ª ap.	0,1404			

(*) Supõe-se b fixo

Valores de $\dfrac{u\,(0,0)}{-Bb^2/\mu}$

F = a/b	1	2	∞
Solução exacta	0,2938	0,1138	0,5000
Método de Kantorovich 1.ª ap.	0,3026	0,1144	0,5000
Método de Rietz 1.ª ap.	0,3125	0,5000	0,625
Método de Rietz 2.ª ap.	0,2922		

Como se verifica, usando o método de Kantorovich o caso mais desfavorável corresponde a $F = 1$. O erro em u_m é da ordem de 0,5 % mas em u_{max} da ordem de + 3 %. Para $F > 2$ o erro cometido é despresável, pois a aproximação converge ràpidamente para a solução exacta.

Para a primeira aproximação do método de Rietz o caso mais favorável é para $F = 1$. O erro em u_m é da ordem de 1 % e em u_{max} da ordem de 6 %. Para $F > 1$ o erro cresce ràpidamente até um máximo de 16,7 %. É todavia apreciável a melhoria que se obtém com a segunda aproximação para $F = 1$. O zero em u_m é da ordem de 0,15 % e em u_{max} de 0,3 %.

Como se verifica também, a 1.ª aproximação de ambos os métodos comete um erro por defeito em u_m e por excesso em u_{max}. Na segunda aproximação do método de Rietz verifica-se o inverso.

4.5.2 — Dos processos apresentados infere-se que, na primeira aproximação, o método de Kantorovich é preferível. Para secções com $F \neq 1$ a sua vantagem é incontroversa. Deve acentuar-se porém que uma conclusão de carácter geral não é possível pois o erro cometido depende essencialmente da forma das funções escolhidas para solução. Todavia, na medida em que no método de Kantorovich a função incógnita corrige em certa medida o erro cometido com a função proposta, infere-se que seja o método recomendado sempre que não se possua à priori uma noção correcta da forma que a solução final deve assumir, se a determinação de função incógnita não se revelar de dificuldade excessiva.

Como é óbvio, o valor da solução aproximada depende da finalidade que se pretende. Se esta for o conhecimento do valor médio de u é em geral da maior utilidade mesmo a primeira aproximação. É o caso por exemplo de apenas de desejar o cálculo dos factores da resistência.

Se é o conhecimento de u em todo o domínio a finalidade da solução aproximada, os desvios podem ser importantes nalgumas zonas. No caso presente devem esperar-se os maiores desvios junto aos cantos.

O conhecimento de u e não apenas o seu valor médio ou máximo tem particular importância em transmissão do calor porque o seu conhecimento prévio é necessário para a determinação do campo das temperaturas. Todavia, mesmo neste caso, a utilização de soluções analíticas aproximadas para u pode ser da maior utilidade por permitir simplificar em considerável extensão aquele problema analítico cujas soluções seriam de outro modo pràticamente inviáveis.

APÊNDICE

Definindo o coeficiente de resistência do escoamento no modo habitual

$$f = -B \frac{D}{\frac{1}{2} \rho u_m^2} \quad (^{13})$$

calcula-se imediatamente o coeficiente de resistência para um canal de secção rectangular e qualquer $F = \frac{a}{b}$ a partir das expressões apresentadas para u_m.

Em função do número de Reynolds à expressão de f é como fàcilmente se verifica dada por

$$f = \frac{32}{k\, R_e \left(1 + \frac{1}{F}\right)^2}$$

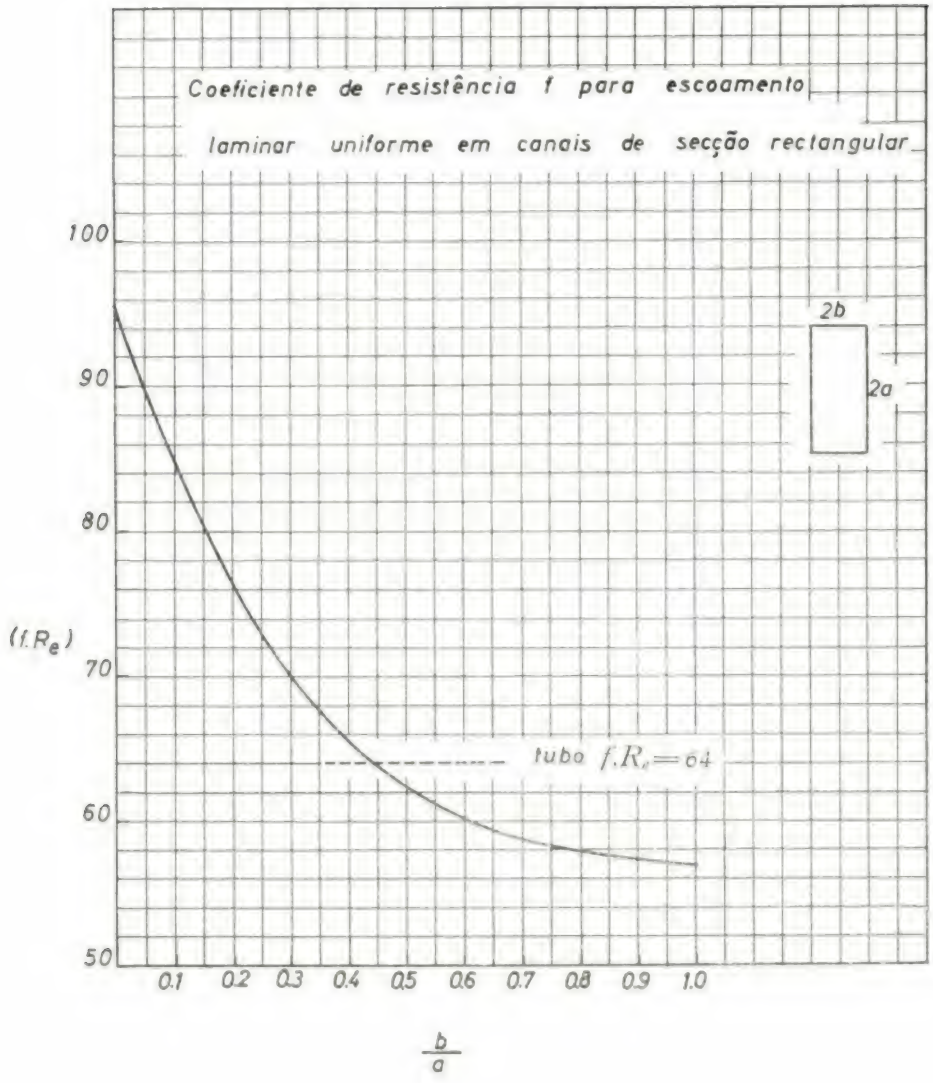
Sendo $D = 4 \frac{a\,b}{a+b} = 4 \frac{b}{1 + \frac{1}{F}}$ o diâmetro hidráulico e $K = -\frac{u_m}{b^2 \frac{B}{\mu}}$

Apresentam-se seguidamente os valores de $\frac{f}{r_e}$ em função de $\frac{1}{F} = \frac{b}{a}$ $(b \leqslant a)$

---

(13) Em escoamento uniforme, num canal das condições do modelo, se P_1 e P_2 forem as pressões na secção 1 e 2 respectivamente, à distância L e as cotas h_1 e h_2 é òbviamente

$$-B = \frac{P_2 - P_1}{L} + \rho g \frac{(h_1 - h_2)}{L} = \frac{\Delta \mathcal{P}}{L}$$



BIBLIOGRAFIA

[1] — Prigogine — Étude Thermodynamique des Phenomenes Irreversibles — Desoer.

[2] — De Groot — Non Equilibrium Thermodynamics — North Holland.

[3] — J. D. Dominguos — Equações Fundamentais em Mecânica dos Fluidos e Transmissão de calor — Revista Portuguesa de Química N.º 2,8 1966.

[4] — Courant, Hilbert — Methods of Mathematical Physics — 1.º Vol. — Interscience.

[5] — Timoshenko — Theory of Elasticity — 2.ª Ed. Mc Graw Hill.

3888

Água como esta, muito rica em ácido humínico, também pode ser utilizada para alimentar caldeiras, se for tratada com permutadores de iões Lewatit.

É preciso ir buscar aqui a água para as suas instalações de caldeiras?

Pode fazê-lo sem receio. Com os permutadores de iões Lewatit é possível transformar água superficial, suja, contendo ácidos humínicos e detergentes, numa excelente água para alimentação de caldeiras.

A Bayer desenvolveu numerosos tipos de ®Lewatit para descalcificar, desmineralizar e dessilicificar a sua água. Especialmente as resinas macroporosas de estrutura esponjosa apresentam grande resistência à contaminação irreversível por substâncias orgânicas. Os nossos tipos MP, macroporosos, são capazes de absorver ácidos humínicos e detergentes no decorrer dum ciclo e de os ceder novamente só na regeneração. A estrutura esponjosa dos nossos tipos macroporosos MP pode ser reconhecida, na prática, pelo seu excelente comportamente na presença de águas contaminadas por substâncias orgânicas.

Sob o microscópio electrónico torna-se visível a razão deste vantajoso comportamento:

Dos poros principais com um diâmetro de alguns milhares de Angström deriva um sistema finamente ramificado de canais. Os macroporos conduzem assim a uma superfície interior de fácil acesso. Isto proporciona uma rápida difusão das partículas carregadas (iões) e das não carregadas (ácidos humínicos e detergentes), dissolvidos na água, nos centros de actividade permutante da resina.

Este mesmo sistema heterogénio de poros é condição essencial para uma eluição irrepreensível das substâncias orgânicas combinadas, no processo de regeneração. A depuração duma resina macroporosa, das substâncias orgânicas absorvidas, efectua-se no decorrer duma regeneração normal, com soluto alcalino. Os permutadores de iões macroporosos não necessitam por isso normalmente de tratamento especial.

A Bayer fornece, além dos permutadores de catiões e de aniões, ainda resinas absorventes.

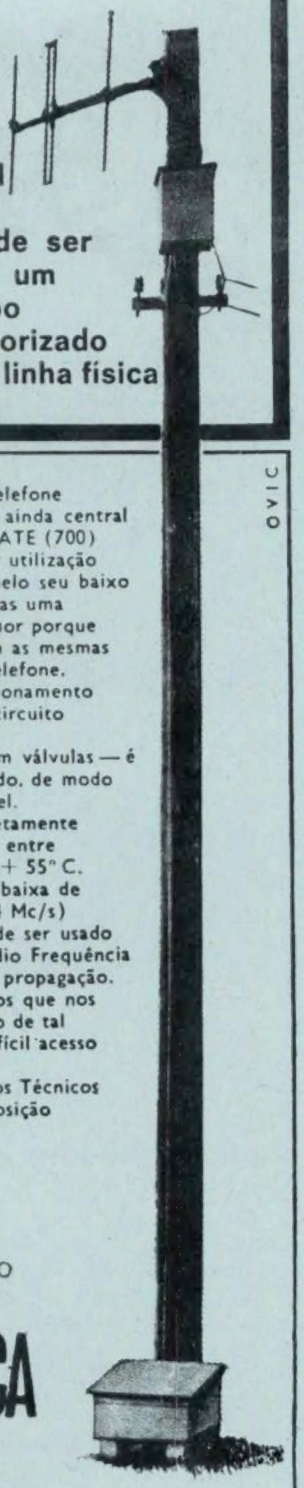
Tem um problema técnico? Confie na experiência da Bayer!

Bayer Alemanha

lewatit

Representante em Portugal:
S. A. R. L. Quimicor
Lisboa, Rua Sociedade Farmacêutica, 3, Tel. 4 21 94,
Porto, Rua de Santos Pousada, 441, Tel. 5 41 41

O mesmo que se obtém com um telefone normal através de um circuito físico, pode ser agora obtido com um feixe hertziano tipo ATE (700) transistorizado sem usar qualquer linha física



Quer seja de telefone para telefone ou telefone para central ou ainda central para central, o equipamento ATE (700) é o mais recente e de melhor utilização nos centros rurais. Melhor pelo seu baixo consumo, pois consome apenas uma carga de pilhas por ano. Melhor porque sendo um rádio telefone tem as mesmas possibilidades que tem um telefone, inclusivé facilidades de funcionamento com linhas partilhadas num circuito de transmissão.
Melhor ainda porque não tem válvulas — é completamente transistorizado, de modo a ter a maior duração possivel.
É de instalação fácil, completamente estanque podendo trabalhar entre temperaturas de — 20° C a + 55° C.
Fabrica-se nas bandas alta e baixa de VHF (54/88 Mc/s). (150/184 Mc/s) tendo ainda a possibilidade de ser usado com um amplificador de Rádio Frequência para um aumento do raio de propagação.
Estes são portanto os motivos que nos levam a aconselhar a adopção de tal equipamento em áreas de difícil acesso para manutenção.
Para mais detalhes os Serviços Técnicos da AEP estão à inteira disposição de V. Ex.ª.

OVIC

A.E.P. Fábrica CABO RUIVO

AUTOMÁTICA ELÉCTRICA PORTUGUESA

LISBOA S.A.R.L.

Associada ao grupo de companhias PLESSEY Inglaterra

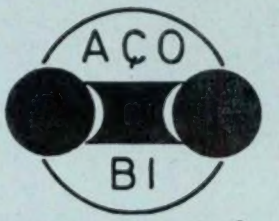
Companhia Portuguesa de Trefilaria

S. A. R. L.

ARMADURAS PRÉ-FABRICADAS **MALHASOL**

Tensão de segurança 3.000 Kgf/cm²

AÇO BI



Tensão de segurança 4.000 Kgf/cm²

AÇOS DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO

que pela eficiência técnica e económica a que conduzem, são um indispensável elemento na moderna construção civil

Para qualquer obra em betão armado consulte:

DIAL — GABINETE TÉCNICO

R. DO INSTITUTO INDUSTRIAL, 18-1.º Dt.º

TELEFONES 671224/5 e 673785 - LISBOA

C. D. U. 539.262

A INVESTIGAÇÃO DA ESTRUTURA DAS SOLUÇÕES DE ELECTRÓLITOS POR MEIO DA DIFRACÇÃO DOS RAIOS X

por MANUEL ALVES MARQUES
Ass. de Física do Instituto Superior Técnico
Bolseiro do Instituto de Alta Cultura
MARIA ISABEL ALVES MARQUES
Bolseira do Instituto de Alta Cultura

RESUMO

*Indica-se o objectivo actual da instalação para a difracção dos raios X recentemente montada no Laboratório de Física do Instituto Superior Técnico * a qual se destina ao estudo de estruturas moleculares. Referem-se algumas circunstâncias do seu projecto e faz-se a descrição dos elementos da montagem nos sens aspectos essenciais.*

SYNOPSIS

An X-ray diffraction arrangement for the study of molecular structures is described in its main points.
Some circunstances of the project are pointed out.

INTRODUÇÃO

São consideradas aqui apenas as soluções aquosas dos sais inorgânicos de catiões metálicos com a estrutura electrónica dos gases raros; serão postas de parte as interacções entre o ião H^+ e as moléculas do solvente e não será analisada a interacção entre o anião e as moléculas de água.

A ideia de que os iões em solução coordenam em torno de si as moléculas de água do solvente tem sido utilizada, pelo menos qualitativamente, na descrição de um grande número de propriedades das soluções electrolíticas, mas o desconhecimento da forma como as moléculas de água estão associadas ao ião central leva por vezes à utilização de esquemas demasiado simplistas: os cálculos baseados nesses mecanismos conduzem para uma mesma solução electrolítica a um número de moléculas do solvente associadas aos iões que é variável conforme a propriedade física ou química que se pretende explicar.

A reorganização da estrutura da água devida à presença de iões dissolvidos pode ser posta em evidência pela alteração do volume da solução aquosa relativa a cada molécula grama de electrólito que se dissolve a mais (1), pela alteração nas mesmas condições da compressibilidade (1), (2), da capacidade calorífica (3), da constante dieléctrica (4), do índice de refracção (5), da viscosidade (1), da condutividade eléctrica (6), da solução aquosa, pela alteração da frequência de ressonância magnética dos núcleos do hidrogénio ou dos núcleos de oxigénio (7) (8) das moléculas de água, pela medição do calor e da entropia (10) de dissolução, etc.

O confronto do número de hidratação que é o número de moléculas de água ligadas ao catião determinado por alguns métodos experimentais — não se pretendem mencionar aqui todos os numerosos trabalhos referentes à hidratação dos iões em solução até agora publicados — ilustra a discordância referida atrás.

Números de Hidratação

MÉTODOS EXPERIMENTAIS	Li^+	Mg^{2+}	K^+
Medição da capacidade calorífica (3)	19	14	11
da velocidade de propagação das ondas hipersónicas (11)	10 a 6	4	15 a 12
da constante dieléctrica (4)	6	5	—

* Alguma aparelhagem foi adquirida com uma verba concedida pelo Instituto de Alta Cultura mediante um acordo estabelecido entre esta entidade e a Shell Portuguesa.

É que a introdução dos iões na água determina nalguns casos dois efeitos contrários e às vezes não é fácil destrinçar a influência de cada um deles: um, ao nível da primeira camada de hidratação, promove uma *solidificação* do líquido fixando ao catião as moléculas de água dessa camada, o outro, ao nível das segunda, terceira camadas rompe a estrutura tetraédica da água líquida e promove assim um aumento de *fluidez* (12). Estes dois efeitos influem nos resultados que os diversos métodos experimentais permitem obter de maneira muito diferente.

Como as moléculas de água directamente ligadas aos catiões metálicos constituem um edifício suficientemente estável para se poderem definir estados de vibração própria a espectrografia do efeito de Raman — e eventualmente a do infravermelho — podem fornecer importantes resultados relativos às forças que constituem o *complexo*, às suas propriedades de simetria e à sua vida média. Estes complexos constituídos por uma camada de moléculas de água aderentes ao catião metálico foram estudados pelo efeito de Raman pela primeira vez por A. da Silveira (13) em 1932 o qual conseguiu observar as bandas que individualizam o complexo octaédrico $Me^{+}(OH_2)_6$ de moléculas de água nas soluções de sais de alumínio de magnésio de zinco e de cobre. Mais tarde, em 1961 (14), estabeleceu definitivamente a estrutura dos complexos $Mg^{2+}(OH_2)_6$ e $Al^{3+}(OH_2)_6$ e em 1965 (15) publicou investigações sobre as soluções de sais de berílio que revelam as bandas de Raman devidas às vibrações dos complexos $Be^{2+}(OH_2)_4$. Investigações mais recentes (16) permitem admitir a coexistência de complexos $Be^{2+}(OH_2)_6$ e de complexos Be^{2+} $(OH_2)_4^{2+}$ em solução. Estes resultados experimentais foram confirmados primeiro por J. P. Mathieu (17) que estudou pelo efeito de Raman os cristais e as soluções aquosas de certos sais; e mais recentemente por R. Lafont (18), R. Hester e R. Plane (19), e por D. E. Irish (20).

É a observação de um espectro de Raman idêntico nas soluções de diversos sais de um mesmo catião, espectro de Raman que é diferente de catião para catião, que permite afirmar a existência de uma estrutura intermolecular estabelecida por esse catião. A persistência das bandas de Raman quando a concentração diminui garante a presença da estrutura intermolecular nas soluções diluídas e simultâneamente afasta o hipótese de se tratar de um fenómeno característico das altas concentrações porque a intensidade das bandas diminui sensìvelmente segundo a mesma lei que a concentração do catião. Como os cristais hidratados se depositam da solução saturada decerto que a configuração interna da solução na vizinhança de uma grande parte dos catiões presentes consiste numa camada de moléculas de água ligadas a estes iões tal como nos cristais hidratados. A difracção dos raios X pelos sais hidratados (21) dos catiões respectivos fornece pois um ponto de partida para o número de moléculas de água adjacentes ao catião, a cuja aderência a observação pela espectrografia do efeito de Raman permitiu atribuir uma vida média relativamente longa, e fornece a distância entre o catião e as moléculas de água do mesmo complexo. Estas distâncias — raios de equilíbrio dos complexos — são ligeiramente discordantes nos diversos sais cristalizados do mesmo catião porque no estado sólido a cooperação entre os diversos constituintes da rede cristalina é mais efectiva e permite assim que os aniões deformem ligeiramente os complexos.

São pouco numerosas as determinações feitas até hoje sobre as soluções electrolíticas com o objectivo de determinar as distâncias entre o catião e as moléculas de água (22) (23). Nenhumas incidiram sobre uma estrutura firmemente estabelecida prèviamente pela espectrografia do efeito de Raman. A montagem experimental que se descreve a seguir permitirá observar em solução por meio da difracção dos raios X os complexos da forma $Me(OH_2)_n$ cuja individualidade foi investigada já por métodos espectográficos.

MONTAGEM EXPERIMENTAL

É conhecido que as figuras obtidas por meio da difracção dos raios X pela matéria no estado líquido são diferentes das figuras de difracção produzidas pelos gases e diferentes das figuras de difracção produzidas por um cristal: uma chapa fotográfica em que incidiu um feixe de radiamento X monocromático difractado por uma fina camada de um gás monoatómico mos-

tra uma constante diminuição da densidade de enegrecimento a partir do centro onde incidiu o feixe directo até à periferia. Na figura da difracção de um feixe de raios X por um cristal pulverizado observa-se, a partir de uma certa distância do centro onde incidiu o feixe directo uma sucessão de anéis concêntricos cujas intensidades variam por variar a concordância de fase dos raios X que interferem em cada ponto do alvo. A estrutura electrónica do cristal permite calcular satisfatòriamente as intensidades obtidas sobre a chapa fotográfica por meio da teoria ondulatória dos raios X.

Se o meio material que produz a difracção dos raios X for um líquido observa-se naturalmente uma figura de simetria circular que não coincide, apesar de se notarem algumas semelhanças, com a série de anéis de difracção produzidos pelo respectivo cristal pulverizado. Os anéis, em menor número, são mais difusos e vão-se esbatendo até desaparecerem à medida que o seu raio aumenta. Nas diferentes formas de considerar as posições relativas médias dos átomos no líquido, formas que permitam explicar satisfatòriamente os diagramas de difracção, consistem os diversos modelos do estado líquido da matéria. Estes modelos conservam vestígios mais ou menos pronunciados de uma estrutura cristalina cuja extensão e subsistência têm sido largamente discutidas nos últimos anos.

É possível arquitectar modelos intermoleculares de um determinado líquido bastante diferentes entre si que, no entanto conduzam por meio da análise de Fourier a diagramas de difracção pràticamente indistinguíveis dentro dos limites da precisão experimental. Apesar desta latitude da indeterminação do modelo do líquido a partir dos resultados experimentais fornecidos pela difracção dos raios X, tem sido estudada por este método uma extensa série de substâncias no estado líquido (24) (25) (26) — os gases raros, os metais, os compostos orgânicos, a água, os sais, as soluções aquosas e não aquosas, as substâncias vítreas. A estrutura de muitos destes liquidos é quase estabelecida à priori; reservam-se as experiências de difracção para determinar a grandeza das distâncias intermoleculares, ou para decidir, entre um pequeno número de arranjos intermoleculares cujas figuras de difracção se prevêem bem diferentes, qual é a forma interna do líquido investigado.

Descrição

O feixe de raios X é estritamente monocromático para permitir a interpretação pormenorizada da figura de difracção obtida no alvo. Usa-se como monocromatizador a lâmina encurvada de um cristal.

A montagem resulta geralmente mais manejável quando a difracção se executa em planos horizontais. A superfície livre do especímen será por isso vertical. No estudo da água e das soluções aquosas têm sido usadas até hoje quase exclusivamente dois tipos de montagem do especímen: *a*) montagem de jacto livre vertical em que o líquido é exposto directamente ao feixe de raios X sem a interposição da parede da célula que o contém (23) (27); *b*) montagem em que o líquido está contido no interior de uma célula de paredes transparentes aos raios X (22) (28) (29). O primeiro tipo tem a vantagem evidente da pureza da amostra — não é necessário descontar a difracção devida à parede da célula. O segundo tipo tem a vantagem de permitir uma regulação cómoda da expessura da solução a usar e de permitir expor ao feixe de raios X uma região extensa: um jacto livre dificilmente se regula até um diâmetro de 0,4 mm — quando se tenta obter um diâmetro menor que este começa a dividir-se em gotinhas — e para aproveitar todo o feixe de raios X teria de se utilizar uma cortina de pequeninos jactos o que não é cómodo. Optou-se pelo segundo tipo — célula plano paralela (fig. 4) — exigindo-se então um ensaio a branco, com a célula vazia para corrigir a figura de difracção obtida. Esta montagem foi já usada por F. Debot (28) para estudar os complexos Cl_4Zn^{2-} nas soluções aquosas de Cl_2Zn. As paredes da célula eram películas de nitrocelulose com a espessura de menos de 0,1 mm. G. Brady (29) usou uma célula com parede de berílio com 0,125 mm de espessura para estudar as soluções electrolíticas.

A utilização de contadores Geiger-Müller na exploração do alvo onde se forma a figura de difracção tem a grande vantagem de rejeitar o radiamento de fluorescência do especímen, cuja frequência é mais baixa que a frequência do radiamento X do feixe incidente (29): os impulsos correspondentes à região espectral da fluorescência do especímen são muito mais fracos e não atingem por isso o limiar do registador de impulsos que só terá em conta os im-